

« Pierres qui roulent » est une expérience de la section « Euréka » du Palais de la découverte. Le visiteur déplace une plaque de Plexiglas sur des volumes à diamètre constant : la plaque reste toujours à l'horizontale. © C. Rousselin.

Formes mathématiques

Au-delà du cercle, les pseudo-ronds

Le cercle est le symbole de la figure géométrique parfaite par excellence. La célébrité de son idéale perfection occulte toute une famille de formes aux propriétés moindres mais tout aussi esthétiques. Pour une fois, mettons-les en lumière.

PAR LAURENT BEDDOU, VICE-PRÉSIDENT DE L'ASSOCIATION « MATH POUR TOUS »

Le diamètre d'un cercle peut être vu comme la distance entre deux droites parallèles qui le « coincent » au plus près. Cette vision intuitive du diamètre peut facilement s'étendre à toute figure fermée en regardant la distance entre deux droites parallèles permettant de la contenir (fig. 1). La différence (de taille) avec le cercle est qu'alors, le plus souvent, le diamètre dépend de la direction donnée aux deux droites. En quelque sorte, le plus grand de ces diamètres mesure l'« encombrement » de la figure. C'est d'ailleurs ainsi que les mathématiciens le désignent... Avec une telle généralisation de la notion de diamètre, on peut se demander si le cercle est la seule figure

possédant un diamètre indépendant de la direction des deux droites. La réponse est non : il existe des « pseudo-ronds » qui, comme le cercle, admettent un diamètre constant. La famille des « polygones » de Reuleaux (fig. 2) en est l'exemple le plus connu. Pour les construire, vous pouvez partir des polygones réguliers (dont les côtés et les angles entre deux côtés sont égaux) ayant un nombre impair de sommets. Puis vous « arrondissez » chaque côté en le remplaçant par un arc de cercle centré sur le sommet opposé (fig. 3). Remarquez que la dénomination de « polygone » est abusive puisque les côtés de ce « polygone » ne sont pas des segments mais des arcs de cercle.

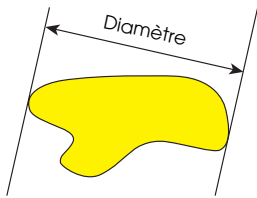


Figure 1. Un diamètre d'une figure fermée quelconque.
Les deux droites sont dans la même direction : elles sont parallèles.



Figure 2. Frantz Reuleaux (1829-1905)
Ingénieur et technologue allemand spécialisé dans l'analyse et la conception des mécanismes.

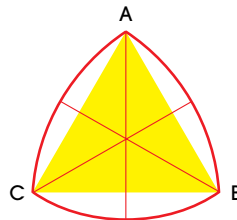


Figure 3. Construction d'un triangle de Reuleaux.
À partir du triangle équilatéral ABC, nous avons tracé trois arcs de cercle ayant chacun pour centre un des sommets (par exemple A) et passant par les deux autres (B et C dans notre exemple).



Figure 4. Description mathématique de trois pièces de monnaie.
La première pièce est une pièce canadienne de 1 dollar en forme d'hendécagone de Reuleaux, c'est-à-dire obtenue en « arrondissant » les côtés d'un polygone régulier à 11 côtés. La deuxième est une pièce irlandaise de 50 pence, en forme d'heptagone de Reuleaux (donc à 7 côtés).
La dernière est une pièce européenne de 20 centimes d'euro dont les crans sont répartis suivant un heptagone régulier.
© C. Rousselin.

L'IMPORTANCE D'ÊTRE CONSTANT

De nombreuses situations de la vie courante nécessitent l'utilisation d'objets à diamètre constant, ce qui confère à toute forme qui possède cette propriété un statut tout à fait particulier. Par exemple, vous êtes-vous déjà demandé pourquoi la plupart des plaques d'égout ont une forme circulaire ? C'est parce qu'ainsi, elles ne peuvent pas tomber dans le trou qu'elles sont censées recouvrir, même si elles basculent. Si la plaque est carrée, elle peut au contraire tomber dans le trou si elle se retrouve à la verticale selon la diagonale du carré, qui est plus longue que son côté. C'est impossible si la forme de la plaque est à diamètre constant. Un autre exemple : les pièces de monnaie. Un avantage d'avoir un diamètre constant est de pouvoir rouler sans se coincer dans une bande de largeur fixée. Ainsi, vous pouvez glisser une pièce dans la fente d'un distributeur sans vous préoccuper de son orientation. Idem pour les boutons à enfiler dans des boutonnières. Mais alors, peut-on imaginer des plaques d'égouts ou des pièces en forme de polygones de Reuleaux ? En ce qui

concerne les plaques d'égouts, c'est techniquement plus difficile de placer un polygone de Reuleaux sur un trou en forme de polygone de Reuleaux qu'un disque sur un disque, puisqu'il faut superposer les angles. D'autant plus que les plaques d'égouts sont généralement très lourdes ! En revanche, il existe plusieurs pièces de monnaies étrangères en forme de polygones de Reuleaux (fig. 4a et b). Leurs formes non circulaires permettent aux malvoyants de les reconnaître facilement. À noter que la pièce (circulaire) de 20 centimes d'euro reprend un peu ce principe avec sept crans répartis régulièrement sur sa circonférence, qui forment donc un heptagone régulier (fig. 4c).

PSEUDO-RONDS / CERCLES, 1 PARTOUT

Au-delà d'arguments esthétiques, il y a un avantage certain à remplacer les cercles par des pseudo-ronds, et plus précisément par le triangle de Reuleaux. En effet, le théorème de Blaschke-Lebesgue nous dit que de toutes les formes planes ayant un diamètre constant



Pour aller plus loin

La famille des pseudo-ronds s'agrandit...

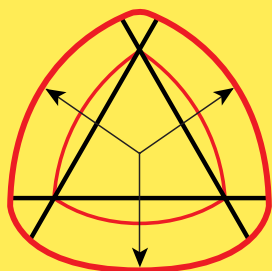


Figure I. Agrandissement d'un triangle de Reuleaux.

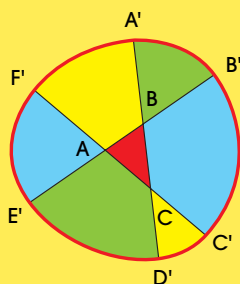


Figure II. Construction d'un polygone de Reuleaux à partir d'un triangle quelconque.

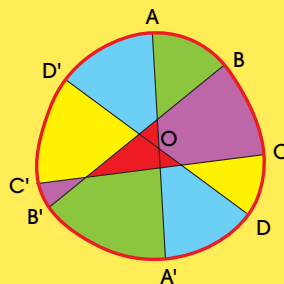


Figure III. Exemple de construction d'un polygone de Reuleaux généralisé, à partir de 4 segments quelconques.

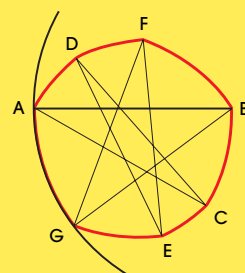


Figure IV. Construction d'un polygone de Reuleaux généralisé ayant un nombre impair de côtés.

Laurent Beddou

est professeur de mathématiques. Il est également vice-président de « Math pour tous » (MPT). Cette association euro-méditerranéenne agit pour une culture populaire des mathématiques, en organisant des ateliers, des manifestations et des conférences de découverte des mathématiques (scolaires et grand public).
Contact : mpt@lumimath.univ-mrs.fr
Laurent Beddou fait également partie du groupe « vulgarisation & diffusion des sciences » de l'IREM de Marseille (www.irem.univ-mrs.fr).

Dans notre article, nous n'avons construit des polygones de Reuleaux qu'à partir de polygones réguliers à nombre impair de côtés, ce qui peut sembler un peu trop restrictif... Voici un élégant principe de construction permettant de se dédouaner de ces contraintes.

Une première généralisation de la construction des pseudo ronds consiste à partir de polygones non nécessairement réguliers. L'idée de la méthode vient du fait que si l'on agrandit un polygone de Reuleaux en traçant une courbe parallèle à chacun de ces côtés, la figure obtenue reste à diamètre constant (fig. I).

Le triangle ABC en rouge sur la figure II est quelconque. La première étape consiste à l'agrandir de façon à obtenir un triangle isocèle. Pour cela, nous choisissons

un point B' de [AB] et C' de [AC] tels que $AB' = AC'$. L'arc de cercle de centre A passant par B' et C' est le premier « côté » (en réalité un arc de cercle) du « polygone » recherché. L'arc de cercle de centre C passant par C' coupe (BC) en D', nouveau sommet du polygone. Puis l'arc de cercle de centre B passant par D' coupe (AB) en E', etc. Finalement, A'B'C'D'E'F' est le polygone de Reuleaux recherché. En effet, avec une telle construction, on a : $A'D' = B'E' = C'F'$. Si cela ne vous suffit pas pour être totalement convaincu, prenez deux points M et N opposés (c'est-à-dire alignés avec un sommet du triangle ABC) et évaluez la distance MN.

Apparaît ainsi un élégant principe de construction engendrant une infinité de figures ayant un nombre pair de « côtés »,



où il n'est même plus nécessaire de partir de polygones. Il suffit de partir de segments de même longueur tous sécants entre eux ([AA'], [BB'], [CC'] et [DD'] sur la figure III) formant deux à deux une paire de triangles isocèles opposés par le sommet (par exemple OAD' et OA'D), que nous « arrondissons » par l'arc centré sur leur intersection (O dans notre exemple).

DANS LA FAMILLE DES PSEUDO-RONDS, JE VOUDRAIS L'IMPAIR...

Pour que la grande famille des polygones de Reuleaux généralisés soit au complet, il faudrait pouvoir en tracer admettant un nombre quelconque de « côtés », c'est-à-dire pas nécessairement pair (fig. IV). Cette dernière sous-famille s'obtient en partant d'un segment [AB] et en traçant des arcs de cercles jointifs d'angles quelconques, toujours dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le premier a pour centre A et passe par B. Il s'arrête en C quelconque. Le deuxième a pour centre l'extrémité du dernier arc tracé, c'est-à-dire C, passe par A et s'arrête en D. Le troisième a pour centre D et passe par C et s'arrête en E, etc. jusqu'au dernier de centre F qui passe par E et s'arrête en G qui, pour réussir à fermer la figure, doit être choisi sur le cercle de centre B passant par A. La famille des polygones généralisés de Reuleaux de degré quelconque est maintenant complète.

L'étape suivante consisterait à construire des figures à diamètre constant sans utiliser d'arcs de cercle... Ce problème, bien plus difficile, peut se formaliser ainsi : « étant donnée une courbe d'extrémités A et B, sous quelles conditions peut-on trouver une courbe la complétant en fermant la figure pour que cette dernière soit à diamètre constant ? ».

fixé, c'est le triangle de Reuleaux qui occupe la plus petite aire. Et c'est le disque qui occupe la plus grande. Autrement dit, pour un même diamètre, il vaut mieux construire un triangle de Reuleaux qu'un disque, car cela fait faire des économies de matière première. Mais attention, les cercles n'ont pas dit leur dernier mot ! Ils possèdent une caractéristique unique qui fait qu'aucun polygone de Reuleaux ne remplacera jamais notre bonne vieille roue circulaire : en plus d'un diamètre, ils possèdent un rayon constant. Vous ne pourrez trouver aucun point à l'intérieur d'un polygone de Reuleaux qui soit à égale distance de tous les points de son contour, alors que c'est bien sûr le cas du centre d'un cercle. C'est-à-dire que si vous faites rouler horizontalement un polygone de Reuleaux, aucun point de son intérieur ne va décrire une droite (fig. 5). Or, pour qu'un véhicule reste toujours à l'horizontale, il faut qu'il soit fixé à ses roues en un point intérieur à la roue qui reste toujours à la même distance du sol. Il y a bien des manières d'agrandir la famille des pseudo-ronds (encadré *Pour en savoir plus*). L'une d'entre elles consiste à passer à la troisième dimension, en essayant de déterminer non plus des surfaces mais des volumes à diamètre constant. Pour voir ce que cela peut donner, nous vous invitons à venir voir au Palais de la découverte l'expérience intitulée « Pierres qui roulent ». À bientôt ? **L. B.**

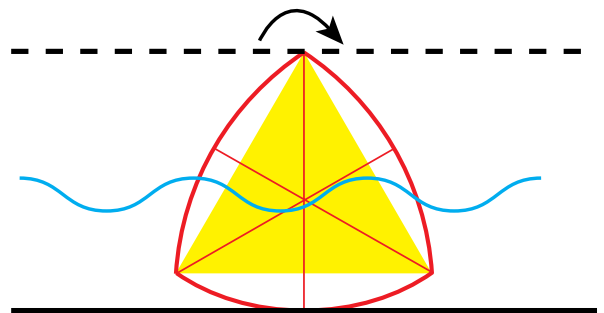


Figure 5. Les pseudo-ronds ne tournent pas rond.

Lorsque l'on fait rouler (sans glisser) un triangle de Reuleaux sur une ligne droite, la trajectoire (ici en bleu) de tout point intérieur n'est jamais rectiligne. Aucun point ne restant à distance égale du sol, pas un seul ne peut servir de centre de rotation.