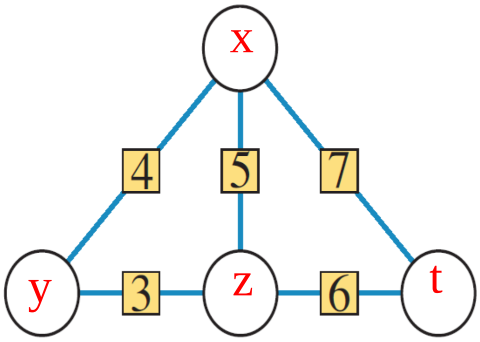
Corrigé du 1/4 de finale FFJM 2018 - par Laurent Beddou

1 - QUATRE NOMBRES À PLACER

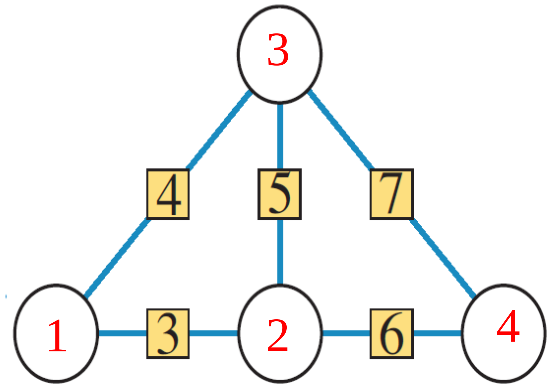
Placez les nombres 1, 2, 3 et 4 dans les disques de telle sorte que chaque nombre écrit dans un petit carré soit égal au total des deux nombres auxquels il est relié par un trait.



Soient x, y, z, t quatre nombres entiers tels que {x, y, z, t} ={1 ; 2 ; 3 ; 4}
On a

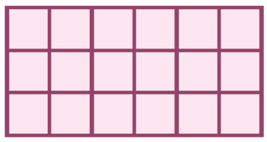
* x + y = 4 donc **x = 3** et y =1 **ou** x = 1 et y =3 (x = 2 et y = 2 impossible !)
* x + t = 7 donc **x = 3** et t =4 **ou** x = 4 et y = 3
* x + z = 5 donc **x =3** et z= 2 **ou** x =2 et z = 3 (**ou** x = 1 et z = 4 **ou** x =4 et z = 5)

Seule solution possible **x = 3 y = 1 z = 2 t = 4**
Vérification sur les 2 autres équations
y + z = 1 + 2 = 3 --> ok
z+ t = 2 + 4 = 6 --> ok



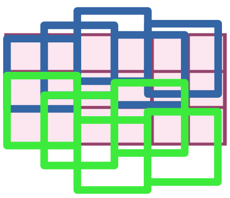
2 - LES CARRÉS

Le jeune Mathis : « Il y a 18 carrés dans cette figure ». Sa soeur Mathilde : « Oui, si tu ne comptes que les petits carrés, mais il y a aussi des carrés moyens et des grands carrés ! ». **Au total, combien la figure compte-t-elle de carrés entièrement dessinés ?**

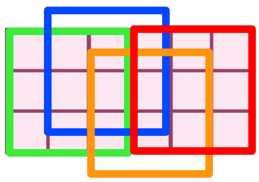


* Carrés de côté N =1 --> 3 x 6 = 18

* Carrés de côté N = 2 --> 2 x 5 = 10

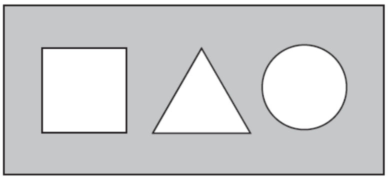


* Carrés de côté N = 3 --> 1 x 4 = 4



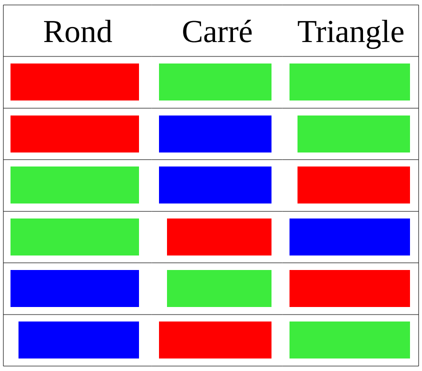
Total 18 + 10 + 4 = **32 carrés sont visibles dans cette figure**

3 - A LA MATERNELLE



La maîtresse a distribué à chaque enfant d'un groupe une feuille avec ces trois symboles et trois feutres de trois couleurs différentes (un bleu, un rouge et un jaune). Elle leur donne la consigne de colorier l'intérieur de chaque symbole avec une couleur de façon que deux symboles d'une même feuille ne soient jamais de la même couleur. Les enfants se sont appliqués et ont respecté la consigne. Seuls deux enfants du groupe ont des dessins identiques, les autres étant tous différents.

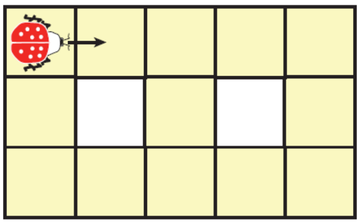
Combien le groupe compte-t-il d'enfants, au maximum ?



Il y a au maximum 6 façons différentes de colorier le dessin. Avec un groupe de 7 enfants, deux auront obligatoirement le même coloriage.

Le groupe d'élèves comporte au maximum 7 enfants

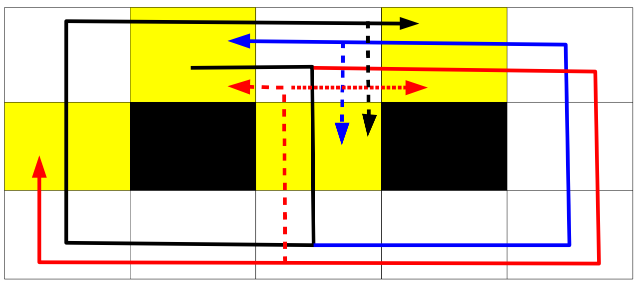
4 - LA COCCINELLE



Une coccinelle se déplace sur les treize cases grisées d'un circuit. Le premier déplacement se fait dans le sens de la flèche. Elle se déplace d'une case par seconde et quand elle a le choix, elle peut aller d'un côté ou de l'autre, mais elle ne revient jamais en arrière. **Marquez d'une croix toutes les cases sur lesquelles elle peut se trouver après exactement 11 secondes.**

Pour un trajet de 11 déplacements, il y 6 chemins possibles, amenant à 4 cases finales distinctes (en jaune)

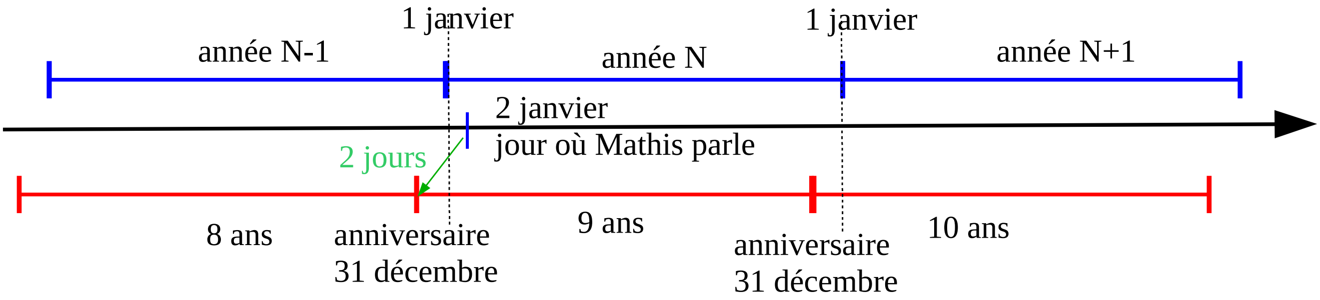
8	**1** (9) (11) 11	2 (10) (10) 10	(11) 3 [11] 9	4 8
7 11		3 [11] (9) (11)		5 7
6 10	5 9	4 8	7 5	6 6



5 - L'ANNIVERSAIRE

« Avant-hier je n'avais encore que 8 ans, mais à la fin de l'année, j'aurai déjà 10 ans » dit le jeune Mathis.

Quel jour de l'année Mathis fête-t-il son anniversaire ?



Mathis à 9 ans le jour où il parle, 8 ans 2 jours avant et 10 ans avant la fin de l'année en cours.
On a donc 365 +2 = 367 jours à cheval sur 3 années civiles.

- Si Mathis parle le 2 janvier, son anniversaire, l'année civile précédente, ne peut être que le 31 décembre. Mais le dernier jour de ses 8 ans est alors le 30 décembre, 3 jours avant le 2 janvier --> contradiction.
- Si Mathis parle le 1er janvier, deux jours avant soit le 30 décembre, il avait encore 8 ans, alors son anniversaire ne peut être que le 31 décembre.

6 - SUITE

Le premier terme d'une suite est 718.
Chaque terme suivant est égal à la somme des chiffres du terme précédent multipliée par 13.

Quel est le 2018^e terme de cette suite ?

On calcule les premiers termes de cette suite de nombre
$U_1 = 718$
$U_2 = (7+1+8) * 13 = 16 * 13 = 208$
$U_3 = (2 + 0 + 8) * 13 = 10 * 13 = 130$
$U_4 = (1 + 3 +0) * 13 = 4 * 13 = 52$
$U_5 = (5 + 2) * 13 = 7 * 13 = 91$
$U_6 = (9 + 1) * 13 = 130$
$U_7 = (1 + 3) * 13 = 4 * 13 = 52$
$U_8 = (5+2) * 13 = 7 * 13 = 91$
$U_9 = (9+1) * 13 = 10 * 13 = 130$
.... etc....

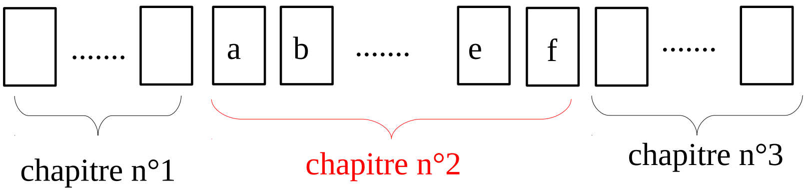
On tombe sur un cycle de 3 valeurs 52 - 91 - 130 qui se répète à partir du rang 3
Donc $U_3 = U_6 = U_9 = ... = U_{3n} = 130$
Les rangs d'indices multiples de 3 donnent tous la valeur 130 à cette suite
Or 2018 = 3 * 672 + 2 = 2016 + 2 Donc $U_{2016} = 130$ et par conséquent $U_{2017} = 52$ puis $U_{2018} = 91$
Le 2018^{e} terme de la suite a pour valeur 91

<u>Remarque</u>
Avec un autre terme de départ U_1 , cette suite pourrait avoir un point fixe égal à 195.
En effet, s'il existe un rang n tel que $U_n = 195$ alors pour le terme suivant de la suite
$U_{n+1} = (1+9+5) * 13 = 15 * 13 = 195$ La suite devient alors constante à 195 !

7 - LE LIVRE DE MATHILDE (coefficient 7)

Mathilde a reçu pour son anniversaire un livre ayant 225 pages qui compte trois chapitres. La somme des chiffres des numéros des deux premières pages du deuxième chapitre est égale à 18. Par un curieux hasard, la somme des chiffres des numéros de deux dernières pages de ce même deuxième chapitre (qui compte plus de 2 pages) est aussi égale à 18.

Quel est le nombre des pages du 2^{e} chapitre de ce livre ?



Soient a et b les numéros des deux premières pages du 2ème chapitre du livre
Soient e et f les numéros des deux dernières pages du 2ème chapitre du livre
Ces nombres sont tous plus petits que 225.
Comme les numéros des pages se suivent : b = a+1 et de même f= e+1
La page n°a peut s'écrire avec 1, 2 ou 3 chiffres
Si on note u le nombre d'unités, d le nombre de dizaines et c le nombre de centaines, on peut écrire

a = 100 c + 10 d + u
b = 100 c + 10 d + (u+1)
Par ailleurs, on notera S(a,b) la somme des chiffres qui composent l'écriture de a et de b

Cas n°1 a s'écrit avec 1 seul chiffre (a<10)

- si a = 9 alors la page suivante b = 10 et a + b = 9 + 10 = 19 ≠ 18 --> **impossible**
- si a < 9 alors a = u et b = u + 1 (sans retenue car b < 10)
  Donc S(a,b) = 2 u + 1 qui est impair donc ≠ 18 qui est pair --> **impossible**

Cas n°2 a s'écrit avec 2 chiffres (9 < a < 99)

- si a = 99 alors b = 100 et S(a,b) = 9 + 9 + 1+ 0 + 0 = 19 ≠ 18 --> **impossible**
- si a < 99
  a = 10 d + u
  b = 10 d + (u+1)

  * si u=9 alors a = 10 **d** + **9** et b = 10 **(d+1)** + 0 (à cause de la retenue)
  Donc S(a,b) = **d** + **9** + **d + 1** = 10 + 2 d = 18
  On en déduit que d = 4 (car 10 + 2 * 4 = 18)
  Conclusion d = 4 et u = 9 d'où a = 49 et b = 50
  * si ≠ 9 alors a = 10 **d** + **u** et b = 10 d + (u+1)
  S(a,b) = **d** + **u** + **d** +**u** + **1**
  = 2 (d + u) +1 impair --> **impossible**

Cas n°3 a s'écrit avec 3 chiffres ($99 < a < 225$)

* si u=9 $a = 100\,c + 10\,d + 9$
 $b = 100\,c + 10\,(d+1) + 0$ ($d<3$ car n°page <225, donc d+1 sans retenue)

Donc $S(a,b) = c + d + 9 + c + d + 1 = 2(c+d) + 10 = 18$

On en déduit que $2(c+d) = 18 - 10 = 8$ et finalement que $c + d = 4$

Conclusion

c = 0 et d = 4 --> **impossible car on retombe sur un nombre a avec 2 chiffres**
ou c = 1 et d = 3 --> a = 139 et b =140
ou c = 2 et d = 2 --> **impossible car sinon a =229 et b= 230 qui sont > 225**
ou c = 3 et d =1 --> **impossible car le nombre de pages < 225 (centaine <3)**

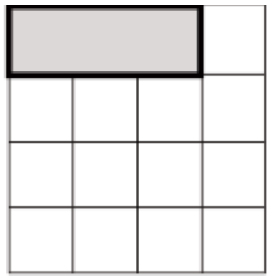
Le même raisonnement amène une étude des cas similaires pour les 2 dernières pages e et f du chapitre 2.
Mais comme e et f sont supérieurs à a et b, il ne reste qu'une seule possibilité :

1ère page du chapitre n°2 : a = 49 **dernière page du chapitre n° 2 : f = 140**

Nombre de pages du chapitre n° 2 : 140 - 49 = 91
donc page n°49 + 91 pages = pages n° 140
Soit au total 92 pages (**et pas 91, piège !!**)

Le chapitre n°2 de ce livre contient 92 pages

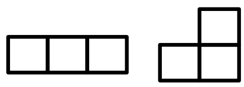
8 - LES TRIMINOS (coefficient 8)



Un trimino est un assemblage de trois petits carrés. On pose des triminos rectangulaires sur une grille carrée de 4 cases sur 4 (voir la figure où un premier trimino est posé). Chaque trimino doit recouvrir exactement trois carrés de la grille dont au moins un carré vide. Il peut donc éventuellement recouvrir d'une case ou de deux cases un trimino déjà posé.

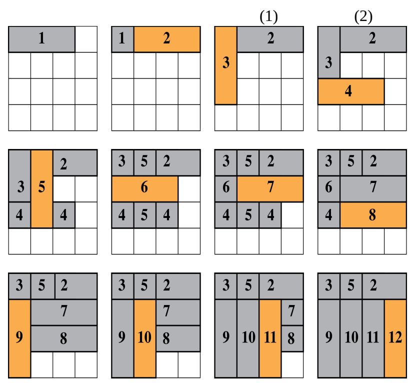
En comptant le trimino déja posé, combien de triminos rectangulaires peut-on poser, au maximum, en respectant la règle ?

Il existe deux formes pour les triminos



Seule la forme rectangulaire sera ici utilisée.
Voir le cas général de ces objets : les polyominos : https://fr.wikipedia.org/wiki/Polyomino
Une fois posé le 1er rectangle, il reste dans la grille carrée $4 * 4 - 3 = 16 - 3 = 13$ cases de libres
Si on optimise au maximum la pose des triminos suivants, en recouvrant (si c'est possible) à chaque fois 2 cases déjà pavées, on en utilisera une case libre à chaque pose. On pourrait donc mettre 13 nouveaux triminos rectangles , soit 14 au total.
Mais cela n'est pas possible au moins 2 fois, on va alors consommer 2 cases de libre -Voir (1) et (2)

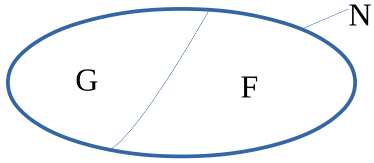
Voici une solution avec 12 triminos rectangulaires,
soit le maximum possible.



9 - LE CLUB DE BASKET (coefficient 9)

Dans ce club de basket, il y avait exactement 40 % de garçons. Six nouveaux garçons se sont inscrits et il y a maintenant autant de garçons que de filles.

Combien ce club compte-t-il maintenant d'inscrits (filles et garçons) ?



Soit G le nombre de garçons
Soit F le nombre de filles
Soit N = F + G le nombre initial d'inscrits au club

Il y a 40 % de garçons, donc $\frac{G}{N} = 0{,}4$ c'est-à-dire $\frac{G}{G+F} = 0{,}4$

On en déduit (produit en croix) que G = 0,4 (G + F) = 0,4 G + 0,4 F
D'où G - 0,4 G = 0,6 G = 0,4 F soit en multipliant par 10 l'égalité : 6 G = 4F
Au final on obtient en divisant par 4 : $F = \frac{6}{4}G = \frac{3}{2}G = 1{,}5\,G$

On retient **F = 1,5 G (1)**
Mais par ailleurs, après les nouvelles inscriptions **G + 6 = F (2)**

En regroupant les deux équations (1) et (2) F = $\boxed{1{,}5\,G = G + 6}$

Alors en multipliant par 2 la nouvelle égalité : 3 G = 2 G + 12, c'est-à-dire 3 G - 2G = G = 12
Au final G = 12 et et donc F = G + 6 = 12 + 6 = 18
Le nombre d'inscrits au club de basket est initialement égal à N = 12 + 18 = 30 puis passe à **N = 36**

10 - LOTERIE (coefficient 10)

Dans une loterie, on a vendu 10 000 billets numérotés de 0000 à 9999. Le tirage au sort se fait de la manière suivante :

• on tire au sort un nombre à trois chiffres ;

• tous les billets dont le numéro contient tous les chiffres du nombre tiré sont gagnants

On a tiré au sort le nombre 116. Les billets gagnants seront donc tous les billets contenant au moins deux 1 et au moins un 6 et seulement ceux-là. **Combien y aura-t- il de gagnants ?**

Il y a 3 façons différentes de placer les chiffres 1, 1 et 6 : 116 ou 161 ou 611
Pour chacun de ces 3 nombres, il y a 4 façons d'intercaler un 4ème nombre, avant, après, entre 2 chiffres :

x 1 x 1 x 6 x
x 1 x 6 x 1 x
x 6 x 1 x 1 x

Mais le nombre x à 10 valeurs possibles de 0 à 9 .
Ce qui donne au total 3 x 4 x 10 = **120 numéros de billets de loto gagnants**
<u>Mais attention</u>, ce dénombrement donne des doublons (on compte plusieurs fois le même billet) !

On en dénombre 14 :	1116 , 1161, 1611, 6111	apparaissent 3 fois
	1166, 1616, 1661, 6116, 6161, 6611	apparaissent 2 fois

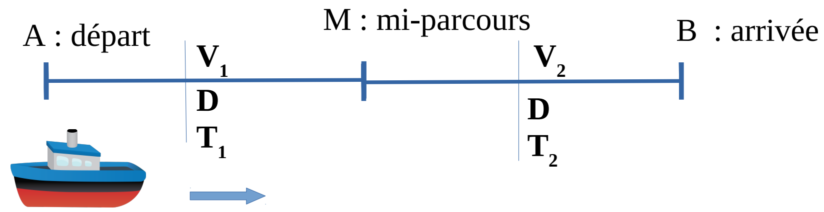
Il y a donc 106 numéros de billets de loto différents gagnants

11 - LE BATEAU (coefficient 11)

Un bateau, après avoir effectué la moitié de son trajet, a augmenté sa vitesse de 25% en raison de la menace d'une tempête. Il est alors arrivé au port une demi heure plus tôt que prévu.

Combien de temps ce bateau a navigué ?

On donnera la réponse en heures et minutes, éventuellement arrondie à la minute la plus proche.



Sur le parcours AM : Vitesse V_1 , distance D , temps T_1
Sur le parcours MB : Vitesse V_2 , distance D , temps T_2
Par définition Vitesse = $\frac{\text{Distance}}{\text{Temps}}$ donc $V = \frac{D}{T}$ et $T = \frac{D}{V}$

- Si le bateau garde la vitesse V_1 sur tout le trajet AB, en posant Temps total $T_0 = T_1 + T_2$
  on a $V_1 = \frac{2\,D}{T}$ donc **$T_0 = \frac{2D}{V_1}$ (1)**
- si le bateau augmente sa vitesse de 25 % sur la 2ème moitié du parcours
  $V_2 = 1{,}25\ V_1 = \frac{5}{4}\ V_1$

et **$T1 = \frac{D}{V_1}$ (2)** $T2 = \frac{D}{V_2} = \frac{D}{(5/4)\ V_1} = $ **$\frac{4\ D}{5\ V_1}$ = T2 (3)**

Le nouveau temps total de parcours T du bateau sur le trajet AB est plus court d'une demi-heure que T_0 :

$T = T_1 + T_2 = T_0 - 0{,}5$ En utilisant les 2 égalités (1), (2) et (3) on a alors :

$$\frac{D}{V_1} + \frac{4}{5}\frac{D}{V_1} = \frac{2D}{V_1} - 0{,}5$$

On observe que l'on obtient 3 fois le même rapport $\frac{D}{V_1} = T_1$

On peut donc écrire $T_1 + \frac{4}{5} T_1 = 2\ T_1 - 0{,}5$ que l'on arrange en multipliant toute l'égalité par 5 :

pour obtenir $5\ T_1 + 4\ T_1 = 10\ T_1 - 2{,}5$ c'est-à-dire $9\ T_1 = 10\ T_1 - 2{,}5$ qui devient **$T_1 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$ (4)**

On trouve alors avec (3) $T_2 = \frac{4}{5} T_1 = \frac{4}{5} * \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Au final $T = T_1 + T_2 = 2{,}5 + 2 = 4{,}5$ heures = 4h 30 min

On vérifie que $T_0 = T + 0{,}5 = 4{,}5 + 0{,}5 = 5$ heures
Mais aussi par (1) $T_0 = 2 * T_1 = 2 * 2{,}5 = 5$ heures ok !

<u>Pour bien comprendre, prenons un exemple</u>

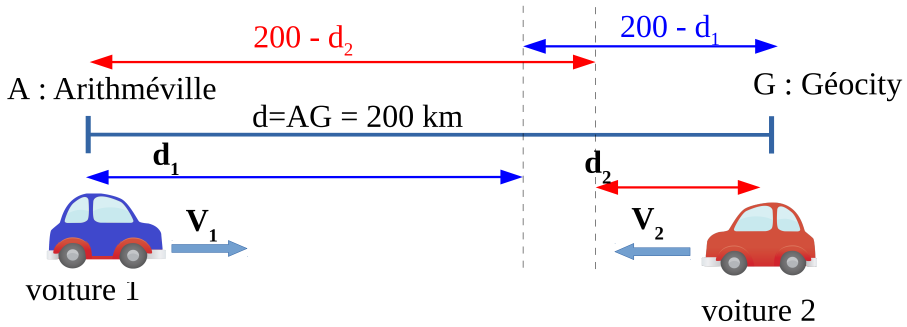
Si D = 50 km et V_1 = 20 km/h le demi trajet durerait 50/20 = 2,5 heures, comme trouvé en (4).
En gardant la même vitesse sur la 2ème moitié du trajet, le temps total serait de 5h.
En augmentant la vitesse de 25 % on effectuerait la 2ème partie du trajet à 1,25 * 20 = 25/km/h
La durée de la 2ème partie du trajet serait alors de 50/25 = 2h, soit au total 2,5 + 2h = 4,5 h
Ce trajet est bien plus court d'une 1/2 heure !

12 - COURSE AUTOMOBILE (coefficient 12)

Deux automobilistes sont partis simultanément l'un d'Arithméville vers Géocity et l'autre de Géocity vers Arithméville, ces deux villes étant éloignées de 200 km. Ils ont roulé à des vitesses constantes différentes s'exprimant par des nombres entiers de km/h dont la différence est un multiple de 7. Après deux heures de déplacement la distance entre la voiture la plus rapide et Géocity était cinq fois plus petite que celle entre la voiture la plus lente et Arithméville.

Quelle est la vitesse de la voiture la plus rapide ?

On donnera la réponse en km/h.



V_1, V_2 et k sont des nombres entiers non nuls

Au bout de 2 h :

distance parcourue par la voiture 1 : $d_1 = 2\ V_1$ **(1)**

distance parcourue par la voiture 2 : $d_2 = 2\ V_2$ **(2)**

<u>Cas 1 : $V_2 > V_1$</u> Alors $V_2 - V_1 = 7k$ (la différence de vitesse est un multiple de 7)

et $d_2 = \dfrac{d_1}{5}$ alors par (1) et (2) on a $2\ V_2 = \dfrac{2}{5}\ V_1$ soit $V_2 = \dfrac{1}{5}\ V_1$

C'est-à-dire $V_2 < V_1$ il y a contradiction avec l'hypothèse du cas 1 --> impossible

<u>Cas 1 : $V_1 > V_2$</u> Alors $V_1 - V_2 = 7k$ **(3)**

et $200 - d_1 = \dfrac{200 - d_2}{5}$ c'est-à-dire en multipliant par 5 : $1000 - 5\ d_1 = 200 - d_2$

D'où $5d_1 = 1000 - 200 + d_2$ soit $5d_1 = 800 + d_2$

En utilisant (1), et (2), on obtient : $10\ V_1 = 800 + 2V_2$ ce qui se simplifie en **$5V_1 = 400 + V_2$** **(4)**

Or par (3) $V_1 = V_2 + 7k$

En regroupant (3) et (4) : $5\ (V_2 + 7k) = 400 + V_2$ ce qui s'écrit $5\ V_2 + 35k = 400 + V_2$

et se simplifie en $4\ V_2 = 400 - 35\ k$ ou encore $V_2 = \dfrac{400 - 35\ k}{4} = 100 - \dfrac{35\ k}{4}$

Pour obtenir une valeur entière de V_2 il faut que k soit un multiple de 4 (car 35 = 7 x 5 ne l'est pas).

si k= 4 $V_2 = 100 - 35 = 65$ donc par (3) $V_1 = 7k + V_2 = 7 * 4 + 65 = 28 + 65 = 93$

si k = 8 $V_2 = 100 - 35 \times 2 = 100 - 70 = 30$ donc $V_1 = 7k + V_2 = 7 * 8 + 30 = 56 + 30 = 86$

si k =12 $V_2 = 100 - 35 \times 3 = 100 - 105 < 0$ -->impossible

si k> 12 $V_2 < 0$ --> impossible

Il y a donc 2 solutions : la voiture la plus rapide roule à 86 km/ ou 93 km/h

13 - UN MULTIPLE SINGULIER (coefficient 13)

Quel est le plus petit multiple de 2018 dont l'écriture décimale commence par 1111… ?

Répondez 0 si vous pensez qu'un tel multiple n'existe pas.

Soit k un nombre entier à n chiffres dont l'écriture en base 10 est $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \,....\, a_n$ tel que

$$\begin{array}{rl} & 2018 \\ \text{x} & \underline{a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \,....\, a_n} \\ = & 1\ 1\ 1\ 1 \,...... \end{array}$$

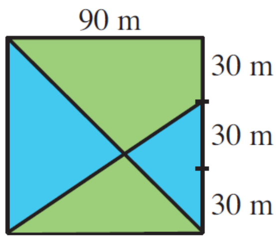
L'algorithme classique pour faire une multiplication commence par la droite (en débutant par les unités). Mais ici, il faut commencer par la gauche (par les poids forts), en cherchant à s 'approcher le plus d'un nombre commençant par 1111.

2018 x 5 = 100 90 mais 2018 x 6 = 12 108 --> trop grand
2018 * 55 = 110 990 mais 2018 x 56 = 113 008 --> trop grand
2018 * 551 = 111 191 8 mais 2018 x 552 = 1113 936 --> trop grand

Une réponse possible est k = 551
Y a t-il une autre solution plus petite que k = 551 ?
Il suffit de tester tous les cas de 1 à 551 sur un tableur --> non, pas d'autre solution !

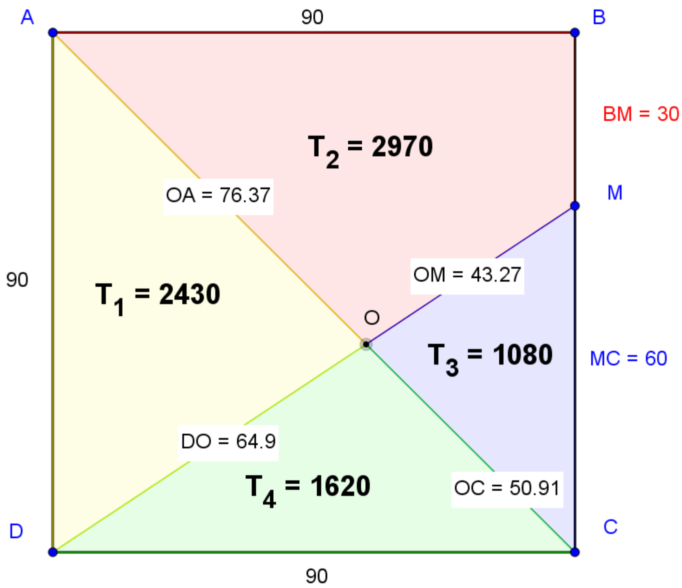
14 - LE PETIT BOIS (coefficient 14)

Le petit bois derrière chez moi est un carré de 90 m de côté. Deux allées le traversent : l'une selon une diagonale du carré, l'autre joignant un sommet à un point situé aux 2/3 d'un côté, comme l'indique la figure. Ces deux allées partagent le bois en quatre parcelles.



Quelle est l'aire de la plus grande de ces quatre parcelles ?

On donnera la réponse en mètres carrés et on arrondira éventuellement au m² le plus proche.



Voir modélisation sur géogébra

On observe que :

$T_3 + T_4 = T_{DCM}$ = 90 x 60 / 2 = 90 x 30 = 2 700 m² **(1)**
$T_1 + T_4 = T_{ADC}$ = 90 x 90 / 2 = 8100/2 = 4 050 m² **(2)**

On en déduit que T1 > T3

* Sachant que (MC) // (AD) et que AHC et DHM sont alignés dans cet ordre, on peut appliquer le théorème de Thalès dans les triangles T1 et T3. Sachant que AD = 90 et MC = 60, on peut écrire :

$$\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OM} = \frac{AD}{MC} = \frac{90}{60} = 1,5$$

On en déduit que AO = 1,5 OC **(4)**

DO = 1,5 OM **(5)**

Conséquence : $T_1 = 1,5^2\ T_3$

$\mathbf{T_1 = 2,25\ T_3}$ **(3)**

Car les triangles T_1 et T_3 sont agrandissement l'un de l'autre avec un facteur 1,5 pour les longueurs et de $1,5^2$ pour les aires. (résultat de cours de 3ème)

En soustrayant les relations (2) et (1) on obtient : $T_1 + T_4 - (T_3 + T_4) = T_1 - T_3 = 4050 - 2700 = 1350$

On peut écrire $T_1 = 1350 + T_3$

En regroupant cette dernière relation avec (3), on obtient : $2,25\ T_3 = 1350 + T_3$

C'est-à-dire $1,25\ T_3 = \frac{5}{4}\ T_3 = 1350$ Soit finalement $T_3 = \frac{1350 \times 4}{5} = 270 \times 4 = 1080$

1er résultat : $T_3 = 1\,080$ m²

Les autres surfaces en découlent grâce aux relations précédemment trouvées :

par (3) : $T_1 = 2,25\ T_3 = 2,25 \times 1080 = 2430$ $T_1 = 2\,430$ m²

par (1) $T_4 = 2\,700 - T_3 = 2\,700 - 1\,080 = 1620$ $T_4 = 1\,620$ m²

Enfin T_2= surface du carré - $T_1 - T_3 - T_4 = 90^2 - 2\,430 - 1\,080 - 1620 = 8\,100 - 5130 = 2970$

$T_2 = 2\,970$ m²

Réponse à la question posée : **la plus grande parcelle est T_2 et sa surface vaut $T_2 = 2\,970$ m²**

Travail complémentaire : calcul de toutes les longueurs des parcelles

* En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle ABC, rectangle en B, on trouve :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 90^2 + 90^2 = 2 \times 90^2$

D'où $AC = 90\sqrt{2}$ **(6)**

* En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle DMC, rectangle en C, on trouve :

$DM^2 = DC^2 + CM^2 = 90^2 + 60^2 = (30 \times 3)^2 + (30 \times 2)^2 = 30^2 \times 9 + 30^2 \times 4 = 30^2 \times (9+4) = 30^2 \times 13$

D'où $DM = 30\sqrt{13}$ **(7)**

Mais on sait aussi que $\begin{cases} AO + OC = AC = 90\sqrt{2} & \text{par (6)} \\ DO + OM = DM = 30\sqrt{13} & \text{par (7)} \end{cases}$

Par conséquent

- en utilisant la relation (4), on trouve : $1,5\ OC + OC = 90\sqrt{2}$

c'est-à-dire $2,5\ OC = \frac{5}{2} OC = 90\sqrt{2}$ soit $OC = \frac{90 \times 2}{5}\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

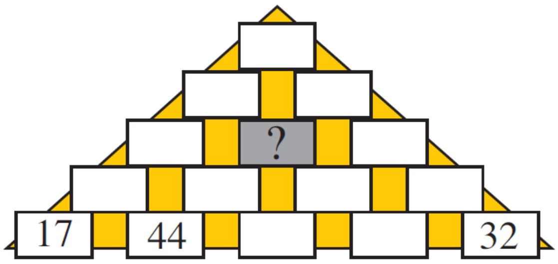
Au final $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{OC = 36}\sqrt{2} \approx 50,911 \text{ ok !} \\ \mathbf{AO = 54}\sqrt{2} \approx 76,367 \text{ ok !} \end{array}}$ (par différence avec $AC = 90\sqrt{2}$)

- en utilisant la relation (5), on trouve : $1,5\ OM + OM = 30\sqrt{13}$

c'est-à-dire $2,5\ OM = \frac{5}{2} OM = 30\sqrt{13}$ soit $OM = \frac{30 \times 2}{5}\sqrt{13} = 12\sqrt{13}$

Au final $\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{OM = 12}\sqrt{13} \approx 43,266 \text{ ok !} \\ \mathbf{OD = 18}\sqrt{13} \approx 64,899 \text{ ok !} \end{array}}$ (par différence avec $DM = 30\sqrt{13}$)

15 - LA PYRAMIDE DE MICK ERINOS (coefficient 15)



Dans la pyramide de Mick Erinos, chaque brique contient un nombre entier positif, et à partir du premier étage un nombre égal égal à la somme des deux nombres inscrits dans les briques sur lesquelles elle est posée. La somme de tous les nombres inscrits dans la pyramide vaut 2018.

Quel est le nombre écrit dans la brique grise ?

Modélisation sur tableur

		225 +6a + 4b		
	149 + 3a +b		76 + 3a +3b	
	105 + a	44 + 2a + b	32 + a + 2b	
61	44+a		a + b	32 + b
17	44	a	b	32

La valeur de la cellule centrale se calcule avec la formule **S = 44 + 2a +b**

La somme de toute les cellules de cette pyramide de nombres est égale à : 19 a +14 b + 861 = 2018
On arrive à l'équation (diophantienne : entière avec plus d'inconnues que d'équations) :

$$a = \frac{1157 - 14\,b}{19}$$

Il suffit de vérifier à l'aide d'un tableur pour quelles valeurs entières de b , le nombre a est aussi un entier positif. On trouve :

pour b = 8 **a = 55** = (1157 -14 x 8)/1955 = 1045/19 on trouve S = 44 + 8 + 2 x 55 = 162
pour b= 27 **a = 41** on trouve S = 44 + 27 + 2 x 41 = 153
pour b = 46 **a = 27** on trouve S = 44 + 46 + 2 x 27 = 144
pour b = 65 **a = 13** on trouve S = 44 + 65 + 2 x 13 = 135

Il y a donc 4 solutions : 135 - 144 - 153 - 162
Vérification sur un exemple

		587		
	322		265	
	160	162	103	
61	99		63	40
17	44	55	8	32

a =	**55**
b =	**8**

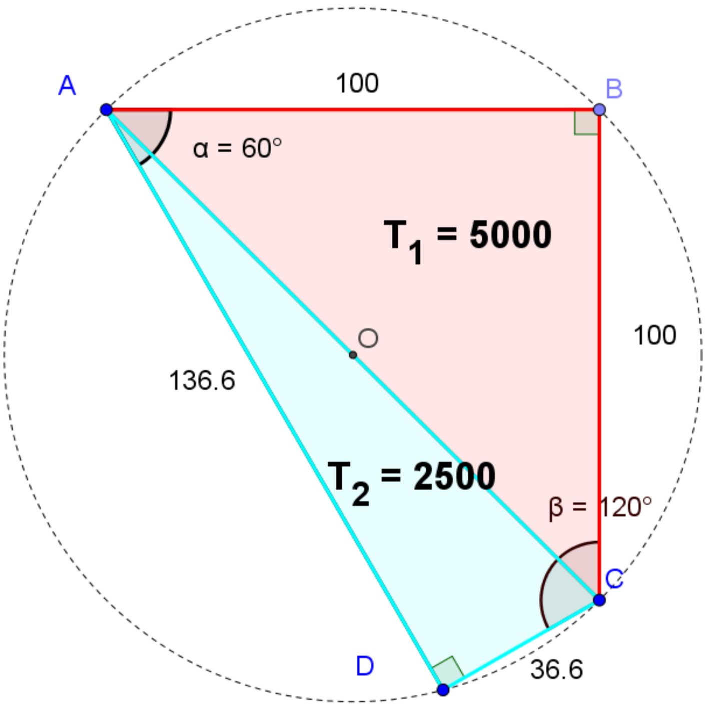
Total des cellules = 2018

16 - LE TERRAIN DU PERE FIDE (coefficient 16)

Le père Fide possède un terrain quadrilatéral. Ce terrain possède deux côtés perpendiculaires de 100 mètres de long, deux angles opposés droits et deux autres angles dont l'un mesure le double de l'autre.

Quelle est l'aire du terrain du Père Fide ?

On donnera la réponse en mètres carrés et on arrondira éventuellement au m² le plus proche.



Voir modélisation géogébra

Rappel de la propriété de 4ème :
Le centre du cerce circonscrit à un triangle rectangle ABC, est le milieu O de son hypoténuse.

On peut ici appliquer cette propriété aux triangles ABC et ADC rectangle en B et D.
On remarque qu'ils ont la même hypoténuse AC.
Donc c'est le même cercle qui passe par les points A, B, C et D !
On dit que ces 4 points sont cocycliques.
(par conséquence R = OA = OB = OC = OD)

Dans un quadrilatère, la somme des angles intérieurs vaut toujours 360° (2 x 180° car on peut découper ABCD en deux triangles ABC et ACD)

Mais comme on a déjà deux angles droits, soit 2 x 90 = 180°, il reste 180° pour les 2 angles opposés restants α et β. Ces deux angles sont donc supplémentaires.

Remarque
On vient de redémontrer, dans un cas particulier, la propriété classique suivante : quatre points sont cocycliques, si le quadrilatère non croisé qu'ils forment, a deux angles opposés complémentaires (leur somme fait 180°).

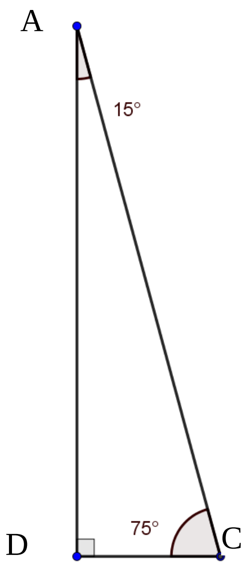
En résumé, on vient de démontrer que **$\alpha + \beta = 180°$ (1)**
Mais de plus l'énoncé nous dit qu'un des deux angles vaut le double de son angle opposé,
soit **$\beta = 2\alpha$ (2)** (ou $\alpha = 2\beta$ ce qui donnerait un dessin symétrique)

On regroupant ces deux équations on obtient : $\alpha + 2\alpha = 180°$ soit $3\alpha = 180°$ et donc $\alpha = 60°$
Par conséquent $\beta = 180 - 60 = 120°$
On vient de prouver que **$\alpha = 60°$ et $\beta = 120°$**

Notons l'aire du terrain $T = T_1 + T_2$

T_1 est un triangle rectangle isocèle
- donc on peut calculer la valeur des angles BAC = BCA = 45°
- son aire vaut la moitié d'un rectangle :

$T_1 = 100 \times 100 / 2 = 5\,000$ **$T_1 = 5\,000\ m^2$**



- son hypoténuse AC se calcule par application du théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100^2 + 100^2 = 2 \times 100^2$
$AC = 100 \sqrt{2}$

<u>Calcul de l'aire de T_2</u>

Angle ADC = β - BCA = 120 - 45 = 75 °
Par application des formules de trigonométrie :
DC = AC x cos (75)

On a vu que $AC = 100 \sqrt{2}$
A la calculatrice (collège) : $\cos 75 = \frac{\sqrt{(6)}+\sqrt{(2)}}{4}$

D'où $DC = 100 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{(6)}+\sqrt{(2)}}{4} = 100 \times \frac{\sqrt{(12)}+\sqrt{(4)}}{4} = 25 \times \sqrt{(3*4)}+2 = 25 \times 2\sqrt{(3)}+2$

De même AD = AC x sin (75)
A la calculatrice (collège) : $\cos 75 = \frac{\sqrt{(6)}-\sqrt{(2)}}{4}$
D'où $AD = 100 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{(6)}-\sqrt{(2)}}{4} = 100 \times \frac{2\sqrt{(3)}-2}{4} = 25 \times (2\sqrt{(3)}-2)$

On peut enfin calculer l'aire du triangle rectangle
$T_2 = \frac{AD \times DC}{2} = \frac{25*25}{2} \times (2\sqrt{(3)}-2) \times 2\sqrt{(3)}+2$

On utilise l'identité remarquable $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$

$T_1 = \frac{625}{2} \times (2\sqrt{(3)})^2 - 2^2 = \frac{625*(4*3-4)}{2} = \frac{625*8}{2} =$ **$2\,500 = T_1$**

Au final $T = T_1 + T_2 = 2\,500 + 5\,000 = 7\,000$

La surface totale du terrain est de T = 7 500 m²

17 - SUCCESSEUR ET DOUBLE (coefficient 17)

Le nombre 2018 est le double d'un nombre premier, 1009, et le successeur d'un autre nombre premier, 2017.

Quelle sera la prochaine année dont le numéro sera à la fois double et successeur d'un nombre premier ?

Voir le programme sur Scratch (langage vu de la 5ème à la 3ème).
Il faut exploiter une liste au format CSV (base de sonnées) des nombres 1ers < 10 000
On trouve l'année 2138.

2138/2 = 1069 est un nombre 1er
2138 - 1 = 2137 est un nombre 1er

<u>Complément</u>

Solutions suivantes :	2342	2474
	2342/2 = 1171 nombre 1er	2474/2= 1237 nombre 1er
	2342-1 = 2341 nombre 1er	2474 - 1 = 2473 nombre 1er

18 - SOMME DES CUBES (coefficient 18)

Mathias adore jouer avec les nombres. Il choisit un premier nombre, calcule la somme des cubes de ses chiffres et écrit le résultat qui sera son deuxième nombre. Il recommence ensuite avec ce deuxième nombre, puis recommence encore et encore jusqu'à ce qu'il tombe sur un nombre déjà écrit.

Ainsi, s'il part de 1012, il écrit : 1012 ; 10 ; 1 ; 1 et il s'arrête.

Quel est le plus petit nombre supérieur à 2018 qui lui permettra de s'arrêter sur le nombre 1 ?

On observe qu'une permutation (changement d'ordre) des chiffres de l'exemple proposé 1012, restera une valeur qui arrêtera le calcul : 112, 1021,1102, 1120, 1201, 1210, 2011, 2101, 2110

Quel est le plus petit nombre, mais plus grand que 2018, que l'on peut écrire avec 1, 0, 1 et 2 ?
Il s'agit de 2101

Vérification
1ère itération : $2^3 + 1^3 + 0 + 1^3 = 8 + 1 + 0 + 1 = 10$
2ème itération : $1^3 + 0 = 1$ --> FIN

Peut-on faire mieux ?
Il faut tester les cas de 2019 à 2100 à la main ou à l'aide d'un programme --> voir le programme sous scratch. Cela fait 83 = 82 + 1 cas (car 2100 - 2019 = 82)
Après test : pas de solution plus petite.
