

Projet Tenségrité-Introduction :

Dans le cadre de l'accompagnement personnalisé était proposé un atelier de recherche scientifique en présence d'un chercheur en mécanique. Ce-dernier nous a proposé plusieurs sujets, parmi lesquels les structures de tenségrité. Le côté architectural, l'originalité et la complexité des structures nous ont plu. Nous étions curieux du fonctionnement de ces systèmes car ils allient pratique et théorie. Cet atelier nous permettait donc une approche de la démarche scientifique. La possibilité de travailler sur plusieurs années nous donne les moyens d'étudier notre sujet, poser nos problématiques et pouvoir y répondre sans contrainte de temps. Le fait de travailler à la fois avec nos professeurs et des chercheurs nous permettait une approche autre que scolaire d'un sujet innovant, en s'appuyant sur nos connaissances et nos envies.

Nous avons d'abord essayé de construire des maquettes pour mieux comprendre leur stabilité. Nous avons essayé de les caractériser (forme, nombre de barres, d'élastiques). Puis nous avons essayé d'en assembler plusieurs et de les plier.

Cette 1^{ère} année de recherche nous a conduits à faire évoluer le sujet suites à nos présentations sur les forums qui ont fait émerger diverses questions.

La 2^{ème} année, en partenariat avec Michel Jean qui venait régulièrement au lycée a été axée sur la théorie des structures. Nous avons également travaillé avec René Motro et Julien Averseng de Montpellier. Nous avons vu que ces structures étaient un sujet d'actualité en visitant leur laboratoire.

Cette expérience nous est bénéfique : ce sujet d'actualité nous permet une approche à travers plusieurs disciplines de la recherche.

Lors de notre présentation nous parlerons des structures de tenségrité comme objet de recherche de la conception à la théorie mais aussi comme objet technique innovant.

Dans les pages suivantes, nous nous proposons de vous faire découvrir ces structures et quelques-unes de leurs propriétés.

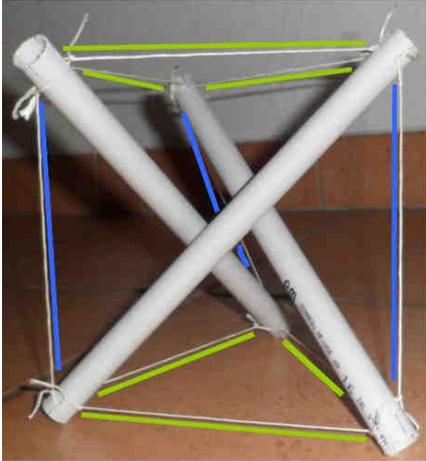
I/Quelques structures et leurs caractéristiques

Une structure de tensegrité est composée d'éléments discontinus (les barres) qui exercent une force de compression et d'éléments continus (câbles, élastiques) qui exercent une force de tension. Les forces se compensent pour créer une structure stable.

Le principe :

Les structures à base polygonale : Ceux sont les plus simples à construire, le nombre de barres détermine le nombre de côtés de la base. Soit B le nombre de barres et e le nombre d'élastiques :
 $e=3B$

Elles sont facilement assemblables, et ce de plusieurs manières. Elles peuvent former des grilles ou, superposées, des tours. Dans une structure idéalement équilibrée, les tensions se répartissent comme sur l'image ci-contre.



Structure à base polygonale
de 3 barres (ou simplex)

Légende

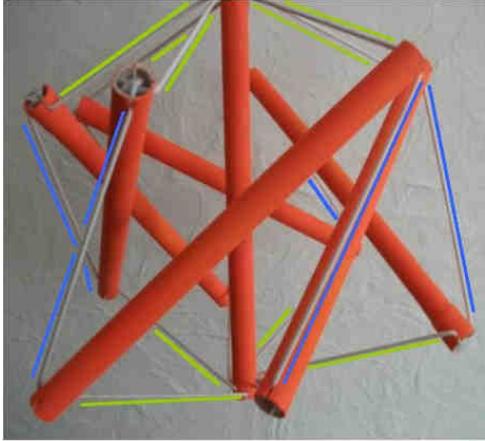
 Elastiques des
bases de mêmes
longueurs et tensions

 Elastiques transversaux
de mêmes longueurs
et tensions

3 barres et 9 fils :

$$3B = e$$

$$3 \times 3 = 9$$



Légende



Elastiques partant de la barre centrale de même longueurs et tensions



Elastiques joignant les barres latérales et de mêmes longueurs et tensions

Structure à barre centrale

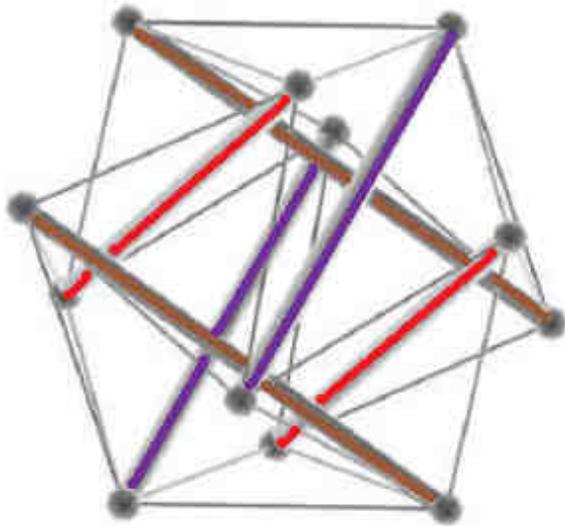
7 barres, 18 fils
 $e = 3(B-1)$
 $18 = 3 \times 7 - 3$

Les structures à barre centrale : elles sont constituées d'une barre centrale et d'autres barres gravitant autour. Les assembler est moins évident.

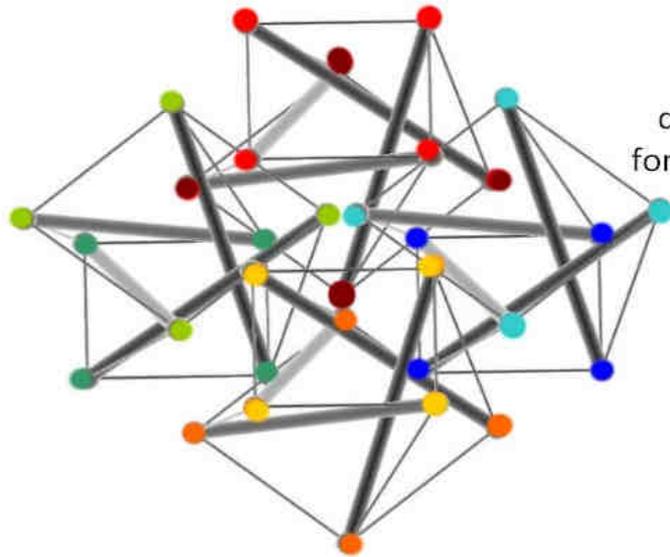
Soit B le nombre de barres et e le nombre d'élastiques : $e=3(B-1)$

Dans une structure équilibrée, les tensions se répartissent comme ci-contre.

L'octaèdre expansé : c'est une structure particulière. Elle est formée de 3 systèmes de barres parallèles (voir figure ci-contre). De plus si l'on relie les extrémités des barres parallèles deux à deux par des câbles, l'ensemble des fils forme les 30 arêtes d'un icosaèdre : le plus grand des 5 polyèdres réguliers convexes de Platon, qui possède 20 faces strictement identiques. La structure stable correspondante est composée de 6 barres et 24 fils. Les tensions des élastiques sont idéalement toutes égales.



Les grilles de tensegrité résultent de différents assemblages, avec de possibles contacts entre les éléments barres. Ces structures ont un avenir dans l'architecture car elles sont basées sur la régularité, le même motif étant répété. En revanche, dans le cadre de futurs éléments artistiques et architecturaux, le dimensionnement et le montage d'une grille sont plus complexes. Nous avons réalisé cette grille, assemblage de 4 structures à base polygonale (ou série prismatique) de 4 barres. Cette grille est dite 1 barre par nœud car les barres ne se touchent pas. Schéma ci-dessous :



Les différentes couleurs
représentent les noeuds
des 4 modules, les nuances
foncé/clair la nappe supérieure
et la nappe inférieure

4 modules de type
"base polygonale",
qui doivent idéalement
posséder les mêmes
longueurs et tensions

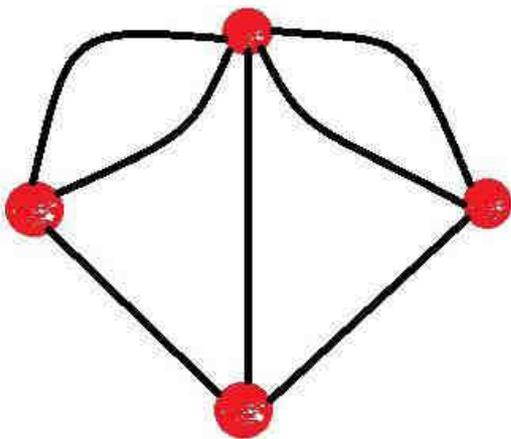
Grille de tensegrité dite "1 barre par noeud"

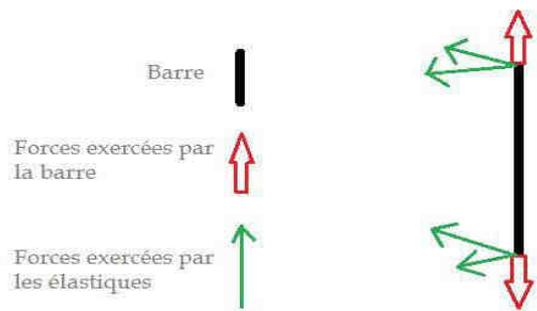


Figure 6 : Sculpture de tensegrité (Easy Landing, K. Snelson), modules élémentaires et grilles (plane et courbe)

Exemples de sculptures utilisant une grille de tensegrité

II/Mathématiques et physique





Placement hypothétique d'une barre sur l'extérieur de la structure dans le cadre d'une construction à base polygonale

La convexité :

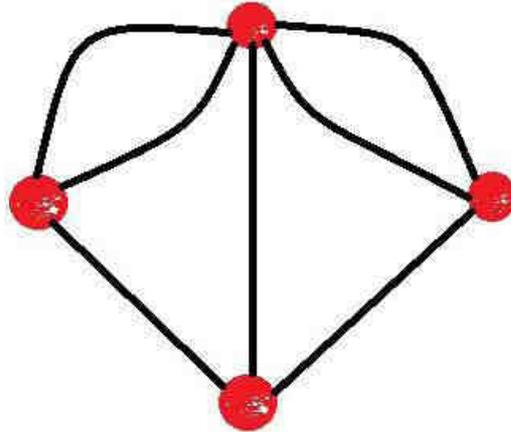
« Y-a-t-il moyen de construire un cube ? Pourquoi cette rotation ? » sont des questions qui nous étaient fréquemment posées sur les forums au sujet des structures de la série prismatique.

Nous pouvons désormais répondre à ces questions en parlant de la convexité.

Dans le cas d'un cube par exemple, les barres seraient probablement placées sur une partie des arêtes de la structure. Si les barres étaient placées dans cette configuration, les forces ne s'équilibreraient pas, car les élastiques exerceraient des forces de tension dans un seul demi-plan : la structure s'effondrerait (schéma ci-contre) :

Est-il possible de construire des structures avec un fil d'un seul tenant ne passant jamais deux fois par la même arête ? Si oui, est-il possible d'y appliquer une règle ?

Pour répondre à cette question, nous nous sommes penchés sur les graphes, et notamment les graphes eulériens.



L'exemple des ponts de Königsberg, ville de Prusse.

La ville est séparée en 4 quartiers, matérialisés par des sommets. Sept ponts relient ces quartiers. Les habitants se demandaient s'il était possible de partir d'un quartier, de passer par tous les ponts une seule fois, et de revenir à leur point de départ (schéma ci-contre)

On remarque qu'il est impossible de passer par tous les ponts sans traverser deux fois le même, et de revenir au point de départ. Pourquoi ?

Un graphe simple est caractérisé par un ensemble X de sommets, et un ensemble A d'arêtes.

On appelle $d(x)$ le nombre d'arêtes partant d'un sommet.

Un graphe eulérien est un graphe qui comporte un cycle eulérien.

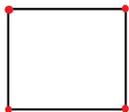
Un cycle eulérien c contient toutes les arêtes du graphe G . Lors d'un cycle eulérien, on arrive de x autant de fois qu'on en repart, chaque arête étant présente une seule fois. Donc $d(x)$ est nécessairement pair.

Cela signifie que pour qu'un graphe soit eulérien, chaque sommet doit posséder un nombre pair d'arêtes. De plus, si nous partons du sommet x_1 , alors le cycle se terminera forcément à ce sommet x_1 .

Ex : si un sommet a un degré 5, c'est-à-dire si 5 arêtes partent de ce sommet, alors ce graphe n'est pas eulérien.

Dans le cadre des ponts de Königsberg, on remarque que tous les sommets du graphe ont un degré impair. Il n'est pas eulérien. Il est donc impossible de passer une seule fois par chaque pont, une arête sera utilisée au moins deux fois. Un graphe eulérien simple est par exemple un quadrilatère, où 2 arêtes, soit un nombre pair, partent de chaque sommets (les « coins »). (cf ci-contre)

Les graphes semi-eulérien : se conforment à la règle énoncée ci-dessus, mais acceptent 2 sommets de degré impair, qui seront les deux extrémités du graphe.



Dans les structures de tensegrité :

Nous nous sommes demandé s'il était possible de construire une structure avec un fil unique. Cela signifie donc que nous devons matérialiser une seule fois chaque arête. Nous avons utilisé les graphes eulériens afin de définir les structures dont la construction serait possible avec un fil unique.

Soit chaque extrémité des barres associée à un sommet, et les fils aux arêtes.

Dans toutes les structures à base polygonale, un nombre impair de fils (3) part de chaque sommet.

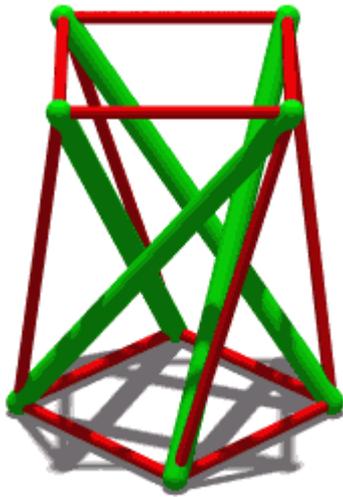
Donc le graphe n'est pas eulérien et il est impossible de construire une de ces structures avec un seul fil.

Dans l'icosaèdre, 4 fils partent de chaque sommet, donc $d(x)$ est pair. Le graphe est eulérien, il est donc possible de construire la structure avec un seul fil.

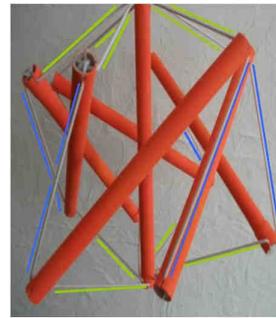
Dans les structures à barre centrale, on peut distinguer deux cas :

- Nombre impair de barres : $d(x)$ est pair pour tous les sommets, donc le graphe est eulérien. Il est possible de construire la structure avec un seul fil.

- Nombre pair de barres : $d(x)$ est impair pour les 2 sommets de la barre centrale. Cela signifie que le graphe est semi-eulérien. Il est donc possible de le construire avec un seul fil, mais les deux extrémités du graphe seront les deux sommets de la barre centrale.



Chaque sommet est de degré 3 : non constructible avec un seul fil



Structure à barre centrale

Légende

— Elastiques partant de la barre centrale de même longueurs et tensions

— Elastiques joignant les barres latérales et de mêmes longueurs et tensions

7 barres, 18 fils
 $e = 3(B-1)$
 $18 = 3 \times 7 - 3$

Chaque sommet est de degré pair : c'est constructible avec un seul fil.

Expérience sur les tensions : Elle visait à mesurer la force s'exerçant dans un élastique de longueur L

Nous avons décidé de réaliser des mesures sur la tension des élastiques d'une structure de la série prismatique de 3 barres. Pour cela nous avons pris deux élastiques aux mêmes propriétés mais de longueurs différentes, c'est-à-dire un élastique de la base et un élastique transversal.

Matériel :

- élastique de la base d'environ 20 cm

- élastique transversal d'environ 32 cm

(Marge d'erreur de la longueur des élastiques d'environ 0,2 cm)

- dynamomètres de 5N et 10N

Conclusion :

Cette expérience a été peu concluante, à la fois à cause du matériel de mesure inadapté (limite des dynamomètres trop faible) et des mesures de longueur des élastiques. Nous n'utiliserons donc pas la mesure obtenue. De plus, nous obtenons ici des mesures alors que les élastiques ne sont pas sollicités dans le cadre d'une structure. Les forces qui s'exercent sont peut-être différentes, notamment à cause de l'influence des forces de compression, et du fait qu'un système de tensegrité s'équilibre à travers l'assemblage de tous ses éléments. Pour effectuer des simulations et des « mesures » impliquant ces structures, nous pensons utiliser le logiciel ToyGL, qui permet de construire des modèles numériques de ces structures.

Protocole et déroulement :

1/Nouer les extrémités de l'élastique transversal

2/Accrocher les deux dynamomètres de 5N aux noeuds faits aux deux extrémités de l'élastique.

3/On tend l'élastique à 32cm.

4/Vérifier que sur les deux dynamomètres s'affiche la même mesure, puis la relever.

La tension de cet élastique est supérieure à 5N. Il en est de même pour l'élastique de la base tendu à 20 cm. Il faut utiliser les dynamomètres 10N.

*Rétérer le protocole avec les deux élastiques et des dynamomètres de 10N.

Pour l'élastique de la base, la mesure relevée est de 6N.

Pour l'élastique transversal, nous sommes à la limite du dynamomètre. Nous n'obtenons donc aucune mesure.

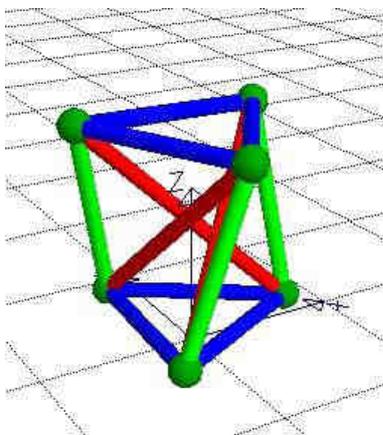
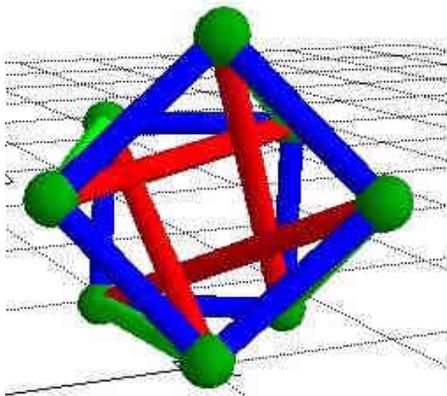
ToyGL :

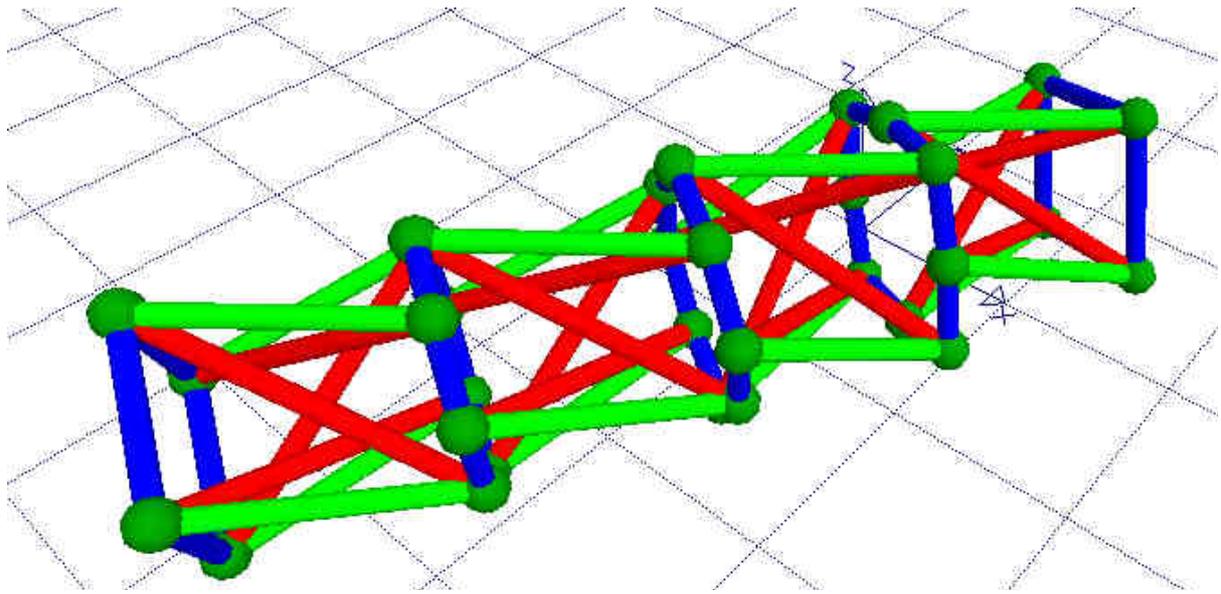
Ce logiciel en libre téléchargement a été programmé par Julien Averseng, chercheur au laboratoire de Montpellier2. Il permet de modéliser les structures selon différents paramètres, ainsi que d'observer l'influence de forces sur la structure créée.

Nous avons principalement utilisé le logiciel pour des essais ou la confirmation de certaines de nos idées, par exemple pour la superposition. En effet, il nous permet de ne pas gaspiller le matériel.

Cependant, notre utilisation du logiciel, au vu de nos connaissances en physique et mathématiques, reste très réduite, se limitant surtout à un peu de manipulation et de réalisation de structures. A l'avenir, nous tenterons d'y effectuer des mesures physiques et des simulations. Mais le modèle numérique devra être considéré avec prudence car certaines caractéristiques « réelles » (la distance entre les barres, et donc leur possible contact) peuvent ne pas être prises en compte.

Ci-dessous deux structures à base polygonale de 3 et 4 barres, celle de 4 étant superposée 4 fois dans l'image du bas.





III/En biologie

Introduction :

Ces systèmes de tenségrité peuvent être plus ou moins utilisés comme modèles en biologie : en effet, les chercheurs pensent que la tenségrité est présente dans les cellules animales et végétales. Peu de recherches ont été effectuées en ce qui concerne les cellules procaryotes. A l'échelle macroscopique ce principe est appliqué à plusieurs articulations (chevilles, coudes, genoux) ainsi qu'à la colonne vertébrale.

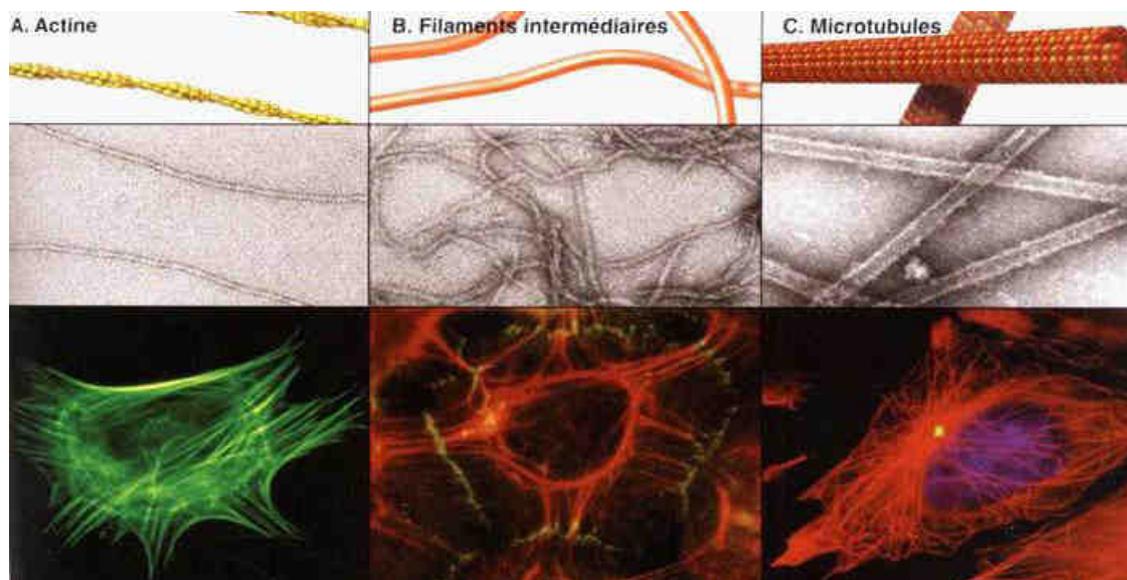
A l'aide de nos recherches, de schémas, et de nos modélisations nous tenterons d'étudier de possibles applications en biologie, en partant d'une analyse au niveau cellulaire puis une étude de structures macroscopiques présentes dans le corps humain et qui sont essentielles à ce dernier.

A l'échelle microscopique :

Un cytosquelette formé tel une structure de tenségrité, est à l'origine des forces exercées par la cellule pour se déplacer ou se nourrir. Le terme cytosquelette provient de l'association des mots « cytoplasme » et « squelette ».

Un cytosquelette s'apparente plus à un ensemble de muscles qu'à un véritable squelette. Ses propriétés sont très variables suivant les composants et les situations.

Les cytosquelettes des cellules eucaryotes sont similaires même s'il y a quelques différences entre les cellules animales et végétales. Ci-dessous certains éléments d'un cytosquelette pouvant jouer un rôle dans les analogies avec les structures de tenségrité :



Une cellule eucaryote comprend :

- des filaments d'actine formés avec la protéine d'actine (dont il existe différentes versions). Ce sont des filaments assez souples donc on pourrait les comparer à des fils élastiques d'une structure de tensegrité flexible.
- des filaments intermédiaires qui représentent les éléments les moins dynamiques du cytosquelette mais qui sont tout de même très importants car ils sont les filaments les plus résistants. On pourrait les comparer aux fils inextensibles ou câbles présents dans les structures de tensegrité indéformables.
- puis des microtubules qui sont les éléments les plus rigides du cytosquelette. Cette rigidité leur est accordée par une structure en tubes due à l'assemblage particulier de monomères (substances organiques utilisées dans la synthèse de polymères). On pourrait donc comparer ces microtubules aux barres présentes dans les structures de tensegrité.
(cf image précédente)

La tensegrité est également un principe repris dans l'ostéopathie. Mais les informations à ce sujet sont rares, et difficilement vérifiables. Sur les conseils des chercheurs de Montpellier, nous avons tenté de critiquer les modèles utilisés en faisant appel à nos connaissances et en comparant les véritables systèmes articulaires aux structures censées y correspondre.

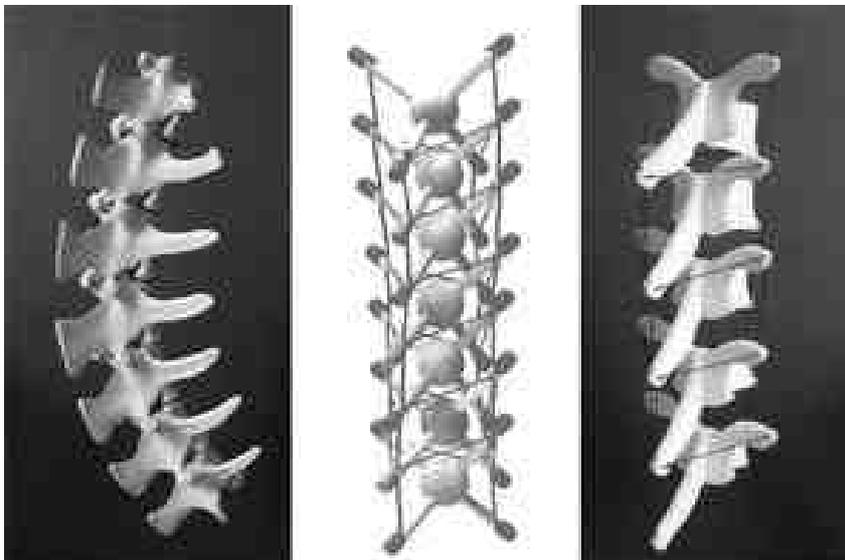
La colonne vertébrale :

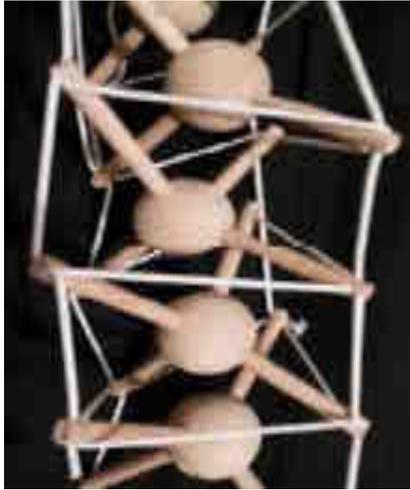
Ci-dessous notre modélisation de la colonne vertébrale, ainsi que des modèles simplifiés.

La colonne n'est sûrement pas une structure de tensegrité à proprement dite, mais certaines de ces caractéristiques sont proches d'un système autocontraint. Ainsi, les interactions entre certains éléments de la colonne sont du type tension/compression. De plus, la colonne, flexible,

nous permet cependant, par exemple, de transporter de lourdes masses : l'alliance particulière d'éléments organiques à faible résistance donne la possibilité d'une résistance accrue, tout comme un système autocontraint peut supporter des forces élevées avec des matériaux à priori peu résistants par rapport aux charges maximales pouvant être exercées.

La colonne vertébrale n'est donc pas un véritable système autocontraint, mais la tenségrité pourrait permettre d'expliquer certains de ses comportements.





L'articulation de la cheville :

Modèle ci-dessous, modèles simplifiés en bas de page.

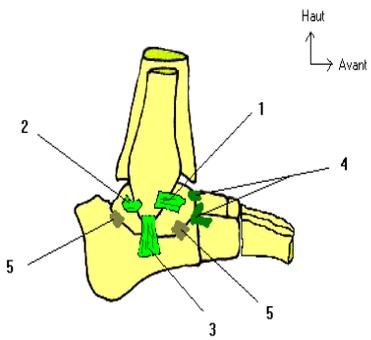
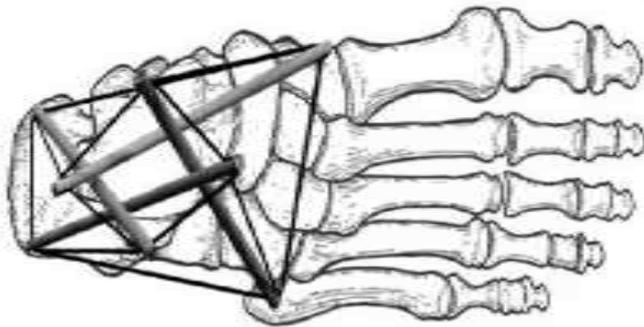
Il existe peu d'informations sur ce modèle. Nous avons donc essayé de comparer les modèles simplifiés de la cheville où figurent ligaments et os avec la structure de tensegrité censée la représenter.

Cependant, il est en fait une structure de la série prismatique à 4 barres avec des longueurs variables.

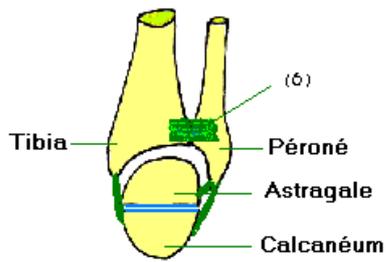
En comparant une cheville réaliste et ce modèle, on peut s'apercevoir qu'il n'existe pas de réels points de comparaison entre les deux.

Ainsi, les 4 barres devraient correspondre à 4 éléments très peu flexibles ou indéformables, ce qui n'est pas le cas. En effet, l'articulation de la cheville consiste plutôt en un emboîtement de l'astragale et du talon, cet ensemble étant lié au tibia et au péroné. Des ligaments lient et enveloppent ces éléments. Ces tendons et ligaments de la cheville ne convergent pas un point, mais possèdent plusieurs points d'attache, contrairement aux structures de tensegrité. Enfin, aucun système de tension/compression ne semble être mis en jeu, et les mouvements de cette articulations sont dus à la l'élasticité des parties souples.

Donc ce modèle n'est pas viable, et il est probable qu'il n'existe pas d'analogies entre la tensegrité et la cheville.



Les ligaments de la cheville



Articulation tibio-tarsienne

Conclusion générale :

Nous vous avons présenté à travers trois disciplines l'aspect théorique des structures. Cependant, ces structures sont utilisés en architecture, et leur côté pratique est tout aussi intéressant car il induit plusieurs questionnements sur la mise en œuvre de la construction. C'est pourquoi nous aborderons l'an prochain l'architecture.

IV/Annexes :

a) Le choix du matériau, et ses problèmes

Pour construire, nous effectuons des encoches dans nos barres de PVC, nous y plaçons nos élastiques. C'est un moyen facile et rapide de les monter.

Les barres de PVC, ont un faible coût, sont facilement façonnables, et constituent un matériau assez fiable.

Un des problèmes rencontrés est le nombre d'entailles et leur profondeur : s'il est trop grand (c'est-à-dire souvent plus de 4 entailles), la structure a tendance à s'abîmer au fil des manipulations. Un moyen d'y remédier est l'utilisation de barres de diamètre plus élevé.

Dans le cadre de la colonne vertébrale, nous avons utilisé des barres et des boules en bois, plus difficilement manipulables mais permettant une structure plus fine donc un meilleur rendu du système.

Nous utilisons ensuite deux sortes d'élastiques, à la déformation assez faible, car certains sont trop souples et nous posent problème lors de l'équilibrage de la structure. Cependant, il faut veiller à ne pas varier de « type » d'élastiques dans une construction, car tensions et longueurs de certains éléments seront variables.

Ces choix traduisent certains problèmes architecturaux :

- **la résistance du matériau (le PVC et les élastiques ne seraient pas adaptés à de fortes intempéries par exemple)**
- **le moyen d'assembler barres et câbles (avec des matériaux barres peu façonnables notamment), de façon à ce que les nœuds ne se rompent pas**
- **parfois l'esthétique d'une structure**

b) Le matériel de mesure

Nous rencontrons également certains soucis quant au matériel de mesure utilisé. En effet, nous ne pouvons que mesurer les longueurs à la règle. Nous ne pouvons observer précisément les tensions sur les structures construites (cf l'expérience peu concluante sur les tensions). Donc lors de l'assemblage des structures, nous manquons d'exactitude.

Ces problèmes se retrouvent aussi en architecture, avec du matériel plus ou moins exact :

- **quel taux d'erreur tolérer, selon l'usage et la complexité de la structure (car les erreurs de longueurs/tensions se répercutent dans tout le système) ?**
- **comment mesurer efficacement, quelles sont les mesures indispensables ? (dans notre cas, les mesures de tension manquent)**

c/ Le montage

La grille de tensegrité réalisée est un bon exemple des problèmes de montage, dans notre cas dus en partie au matériel de mesure. Nous avons porté notre choix sur l'assemblage cité dans le I, partie grille.

Un des principaux problèmes rencontrés a été l'exactitude de la construction des structures elle-même. Pour réussir à former la grille, les 4 constructions doivent être rigoureusement identiques. Avec nos moyens limités, impossible de vérifier exactement tensions et longueurs. De plus, le nombre d'encoches était trop faible, et nous étions obligés de mettre deux élastiques par encoche. La structure a été construite, en vérifiant la longueur des élastiques à l'aide d'une règle. Nous avons déjà rencontré un premier problème, à savoir que lors de la coupe certaines barres avaient été abîmées : une première encoche s'est déjà rompue. De plus, la structure est déformée à cause des tensions inexactes des élastiques.

Nous avons également construit l'octaèdre expansé à grande échelle, et sa construction est plus difficile du fait de sa taille.

En architecture :

- **Comment tendre des structures de grandes dimensions ?**
- **Comment assurer l'exactitude des tensions ?**