

UE Maths en Jeans 1 — Saint-Charles — 22 janvier 2018

## Sujets proposés

Julien Cassaigne

`julien.cassaigne@univ-amu.fr`

`http://www.maths-pour-tous.org/cours-mej/`

# Maths en Jeans 1

*Initiation à la méthodologie de recherche scientifique par un travail sur des problèmes de mathématiques ouverts, en liaison avec d'autres disciplines.*

- choix d'un sujet (problème ouvert) parmi ceux proposés
- travail sur ce sujet tout au long du semestre
- en groupes de 3 à 5 étudiants
- objectif : se mettre dans la peau d'un chercheur
- évaluation : travail en TD + exposé + rapport écrit

## Qu'est-ce qu'un problème ouvert ?

Dans les exercices dont vous avez l'habitude :

- l'énoncé est clair et contient tous les éléments nécessaires ;
- vous devez respecter cet énoncé précisément ;
- vous savez qu'il peut se traiter avec les méthodes du programme ;
- le prof connaît la solution.

## Qu'est-ce qu'un problème ouvert ?

Dans les exercices dont vous avez l'habitude :

- l'énoncé est clair et contient tous les éléments nécessaires ;
- vous devez respecter cet énoncé précisément ;
- vous savez qu'il peut se traiter avec les méthodes du programme ;
- le prof connaît la solution.

Un problème ouvert, c'est tout le contraire :

- l'énoncé peut être vague, omettre des informations ;
- vous avez le droit de le changer s'il ne vous inspire pas ;
- vous n'avez aucune idée a priori des méthodes à utiliser ;
- il débouche sur des questions que personne n'a encore résolues.

# Comment aborder un problème ouvert

Il n'y a pas une méthode unique, il faut être créatif !

- bien s'approprier l'énoncé, le **reformuler** si besoin ;
- choisir des **notations** (que l'on pourra changer ensuite) ;
- traiter des **exemples**, à la main ou avec un ordinateur ;
- formuler des **conjectures** ;
- décomposer en **sous-problèmes** ;
- ajouter des **hypothèses simplificatrices** (que l'on pourra lever par la suite) ;
- essayer **plusieurs** approches ;
- rédiger des **démonstrations** ;
- construire des **contre-exemples**...

## Conseils pratiques

- Notez tout ce qui est fait en TD, pour le retrouver facilement, par exemple dans un **cahier de recherche**.
- Vous pouvez aussi vous retrouver pour travailler en dehors des TD.
- Vous pouvez faire appel à toutes les ressources disponibles (livres, enseignants, sites web) à condition de toujours **citer vos sources** et de ne pas vous contenter de recopier.
- Si vous êtes absents, prévenez les autres membres du groupe, transmettez-leur les documents que vous avez, tenez-vous au courant du travail fait.
- N'attendez pas la fin du semestre pour commencer à rédiger.

## Les sujets proposés

- Des problèmes plutôt géométriques :
  1. Problèmes de distances,
  2. Problèmes d'illumination,
  3. Réseau de longueur minimale,
  4. Les tricaèdres,
  5. Rangement de calissons,
  6. Découpage du plan,
  7. Les gardiens de musée.
- Des problèmes de suites de nombres :
  8. Les suites d'Akiyama,
  9. Les suites de Kolakoski,
  10. Les suites de Steinhaus,
  11. Multiples et diviseurs,
  12. Les parts de pizza,
  13. Les rondelles.

# 1. Problèmes de distances

L'ensemble des points à égale distance de  $A$  et  $B$  s'appelle la médiatrice de  $[AB]$ . Vous savez que c'est la droite perpendiculaire à  $(AB)$  qui passe par le milieu de  $[AB]$ .

Mais si on change la notion de distance, que devient la médiatrice ? Par exemple, sur la surface d'une sphère, une médiatrice est un cercle.

Et sur la surface d'un cube, ou d'un autre solide ? Et dans une ville américaine, où les déplacements se font le long des lignes d'un quadrillage régulier ?

## 2. Problèmes d'illumination

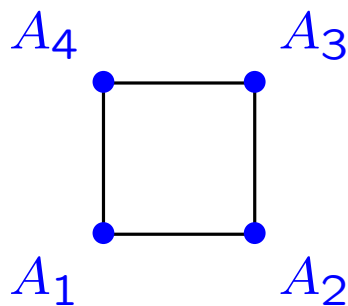
A. Les professeurs Smith et John ne peuvent se supporter et vont se trouver ensemble pour une réunion dans une pièce rectangulaire dont les murs sont des miroirs. Smith demande à ses étudiants de se placer de telle façon qu'il ne voie pas John. Où doivent se placer les étudiants de Smith ? (problème d'olympiade russe)

B. Quelle forme donner à une pièce dont les murs sont des miroirs pour qu'il soit impossible d'éclairer l'ensemble de la pièce avec une seule lampe ?

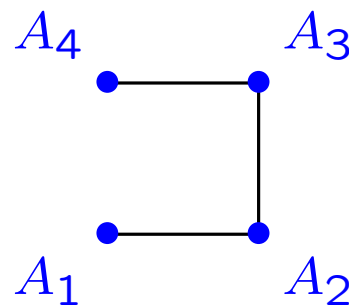
### 3. Réseau de longueur minimale

Des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont placés sur un plan. On veut construire un réseau de communication qui permette d'aller de n'importe quel  $A_i$  à n'importe quel autre  $A_j$ , éventuellement avec des étapes intermédiaires.

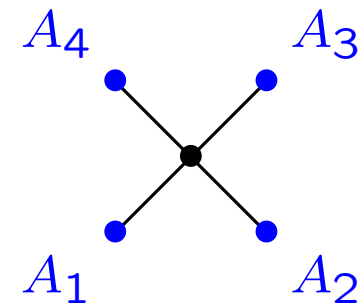
Quelle est, au minimum, la longueur totale de ce réseau ?



$$L = 4$$



$$L = 3$$

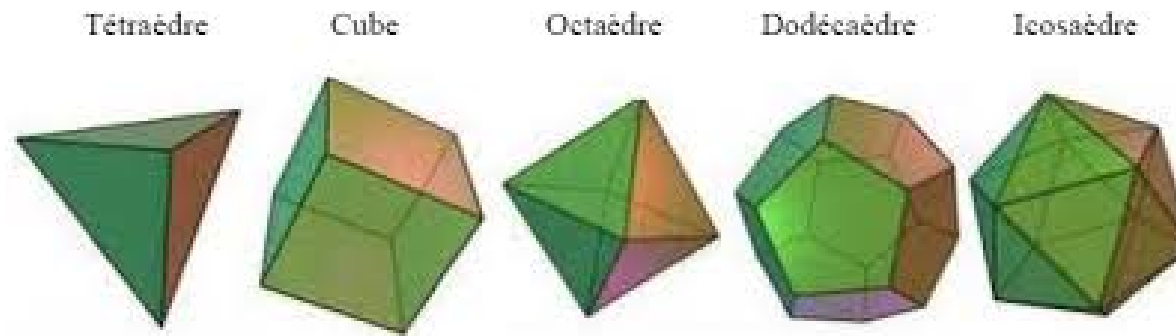


$$L = 2\sqrt{2}$$

## 4. Les tricaèdres

Un *tricaèdre* est un polyèdre dont les faces sont uniquement des triangles équilatéraux et des carrés.

Parmi les cinq polyèdres de Platon, quatre sont des tricaèdres. Cherchez l'intrus !



Il y a beaucoup d'autres tricaèdres. Peut-on les décrire tous ?  
Les nombres de triangles et de carrés sont-ils quelconques ?

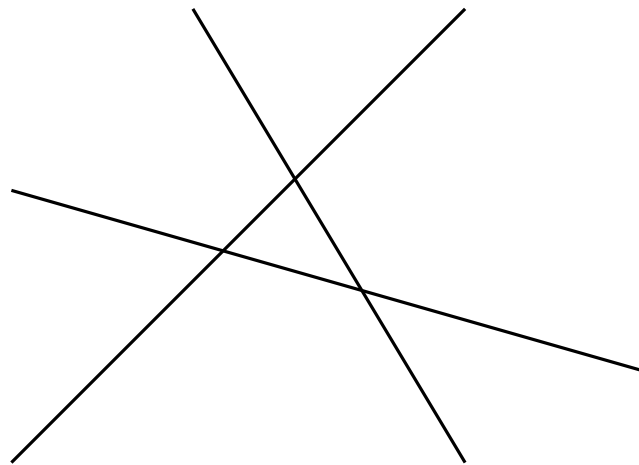
## 5. Rangement de calissons

Combien peut-on faire entrer de calissons dans une boîte rectangulaire ?



## 6. Découpage du plan

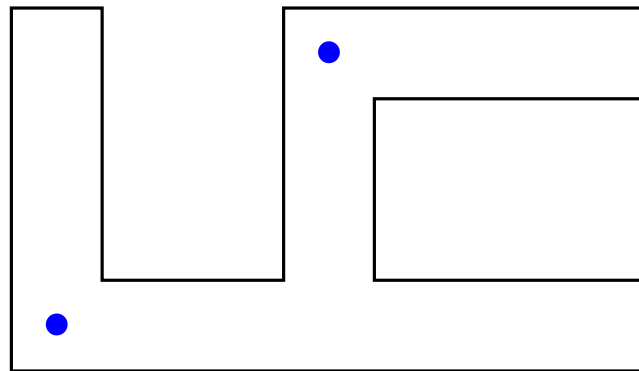
Si on trace trois droites, ni parallèles ni concourantes, on délimite une région bornée (un triangle) et 6 régions non bornées (3 à 2 côtés, 3 à 3 côtés). Et avec quatre droites, quelles sont les configurations possibles ? Avec  $n$  droites ? Avec  $n$  grands cercles sur une sphère ?



## 7. Les gardiens de musée

Combien faut-il placer de gardiens dans un musée pour qu'à tout instant, toute partie du musée soit vue par au moins un gardien ?

Pour commencer, on peut supposer que le musée est un polygone (pas forcément convexe) à  $n$  côtés, que les gardiens sont ponctuels et qu'ils ont une vision à 360 degrés. Comment le nombre de gardiens nécessaires dépend-il de  $n$  ?



## 8. Les suites d'Akiyama

Soient  $a_0$  et  $a_1$  deux nombres entiers. On définit la suite  $a_n$  par :

$$a_{n+1} = - \left\lfloor \frac{a_n}{2} + a_{n-1} \right\rfloor$$

Par exemple, si on part de  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$ , on trouve la suite :

$$0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, 0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, \dots$$

qui est périodique.

Toutes les valeurs de départ donnent-elles une suite périodique ?

Si on trace les points de coordonnées  $(a_n, a_{n+1})$ , on obtient des figures intéressantes. Pourquoi ?

## 9. Les suites de Kolakoski

La suite

2211212212211211221211212211...

est formée de blocs d'un ou deux chiffres identiques. Si on remplace chaque bloc par sa longueur :

2 2 11 2 1 2 2 1 2 2 11 2 11 2 2 ...

on retrouve la suite de départ !

Comment est-elle construite ? Y a-t-il d'autres suites qui ont la même propriété ? Est-elle périodique ? A-t-elle autant de 2 que de 1 ?

## 10. Les suites de Steinhaus

23

236

23618

236186

2361868

236186848

23618684848

...

236186848483232323224666666648...

Cette suite est-elle périodique ?

Quels sont les chiffres qui apparaissent ?

Certains chiffres sont-ils plus fréquents que d'autres ?

## 11. Multiples et diviseurs

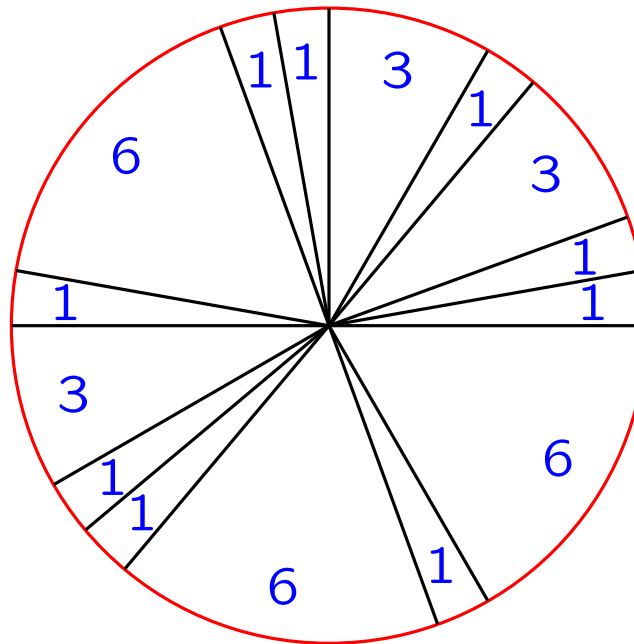
On dispose de cent cartes numérotées de 1 à 100. On place des cartes les unes à la suite des autres en respectant la règle : si deux cartes se suivent, le numéro de l'une est multiple de celui de l'autre. Ainsi, la suite suivante est possible :

98, 49, 7, 14, 2, 6, 12, 24, 3, 93, 31, 62.

Quelle est la plus longue suite qui respecte la règle ?

## 12. Les parts de pizza : un jeu de stratégie

Une pizza est découpée de manière inégale, par exemple :



Chaque joueur se sert à tour de rôle, en prenant une part sur le bord. Quelle est la stratégie pour manger le plus de pizza possible ?

## 13. Les rondelles

Sur une machine, on veut régler précisément l'espace entre deux pièces montées sur un axe. Pour cela, on intercale des rondelles d'épaisseur connue.

On souhaite pouvoir réaliser toutes les épaisseurs de 10 mm à 60 mm, par pas de 0,1 mm. Quel est le nombre minimal de rondelles qu'il faut prévoir, et quelles sont leurs dimensions, sachant que :

- une rondelle fait au moins 4 mm d'épaisseur (sinon elle n'est pas assez solide) ;
- l'épaisseur d'une rondelle est multiple de 0,1 mm ;
- on ne peut pas utiliser plus de deux rondelles en même temps ?