Introduction

Soit λ *la fractalité de la suite. On pose les fonctions suivantes* :

$$\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \to \lambda \cdot n$$

et

$$\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, n \to n + E\left(\frac{n-1}{\lambda - 1}\right) = E\left(\frac{n \cdot \lambda - 1}{\lambda - 1}\right)$$

où $E(x)$ *désigne la partie entière de* x.

On dit alors que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ *est fractale de fractalité* λ *si et seulement si* :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{\varphi(n)} = u_{\psi(n)}$$

cas $\lambda = 2$:

Par définition, on a
$\varphi : n \to 2 \cdot n$
et
$\psi : n \to 2 \cdot n - 1$
d'où
$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\quad u_1 = u_{2 \cdot 1} = u_2 = u_3 = ... = u_n$
(*démonstration par récurrence immédiate*)

On voit donc que si $\lambda = 2$, *la suite est constante donc* $u_1 = u_{\lambda - 1}$ *et la suite est bien périodique.*

Théorème

Toute suite fractale (u_n) de fractalité λ, non-constante, telle que $u_1 \neq u_{\lambda - 1}$ est non-périodique.

Démonstration

• On se propose de montrer tout d'abord que

$$\left(u_n\right) \textit{ périodique à partir d'un certain rang} \Leftrightarrow \left(u_n\right) \textit{ périodique}$$

<u>Preuve :</u>

L'implication de droite à gauche est évidente.

Supposons $\left(u_n\right)$ périodique à partir d'un certain rang. Notons T > 0 cette période. Par définition on a :

$\exists\, N \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \geq N, \forall\, k \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+kT}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme φ *est strictement croissante à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *il existe* $\propto \in \mathbb{N}$ *tel que* $n' = \varphi^{\propto}(n) \geq N$

et alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_{\varphi^{\propto}(n)} = u_{n'} = u_{n'+kT}$$

En particulier, si on prend $k = \lambda^{\propto} \cdot k'$ *avec* $k' \in \mathbb{N}$, *on obtient*

$$u_n = u_{\varphi^{\propto}(n) + \varphi^{\propto}(k' \cdot T)} = u_{\varphi^{\propto}(n + k' \cdot T)} = u_{n + k' \cdot T}$$

(*par linéarité de* φ)

On a ainsi prouver l'implication réciproque.

• Montrons que la suite n'est pas périodique.
La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1. $\forall\, u \in \{1;...;T-1\}, \forall\, k \in \mathbb{N},\ T \nmid u \cdot \lambda^k$

En effet,

$$T \mid u \cdot \lambda^k \Rightarrow \exists\, k' \in \mathbb{N}, T \cdot k' = u \cdot \lambda^k$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+u} = u_{\varphi^k(n+u)} = u_{\lambda^k \cdot n + \lambda^k \cdot u} = u_{\lambda^k \cdot n + k' \cdot T} = u_{\lambda^k \cdot n} = u_n$$

Et donc on en déduit que $\left(u_n\right)$ *est périodique de période* $u < T$,

ce qui est absurde puisqu'on a supposé T la période.

Par conséquent, l'assertion est bien prouvée.

2. On regarde le reste de la division euclidienne de λ^k et de λ^{k+1} par T :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, a \in \mathbb{N},\ \lambda^k = a \cdot T + r_k \qquad où\ 0 < r_k < T - 1$$

et donc en multipliant par λ, *on obtient*

$$\lambda^{k+1} = \lambda \cdot a \cdot T + \lambda \cdot r_k$$

Mais d'autre part, on a aussi

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, a' \in \mathbb{N},\ \lambda^{k+1} = a' \cdot T + r_{k+1} \qquad où\ 0 < r_{k+1} < T - 1$$

Donc en faisant la différence on obtient que

$$0 = \left(a' - a \cdot \lambda\right) \cdot T + r_{k+1} - r_k$$

$$\Rightarrow r_{k+1} \equiv \lambda \cdot r_k \ \ [T]$$

Pour tout k, le reste prend sa valeur dans $\{1; ...; T - 1\}$. *La suite des restes prend, de fait, un nombre fini de valeurs une infinité de fois.*

Donc $\exists\, K \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\quad r_k = r_{k+K}$

Par conséquent, $r_{k+K} = r_k \equiv \lambda^K \cdot r_k \ \ [T]$

$$\Rightarrow r_k\left(\lambda^K - 1\right) \equiv 0 \ \ [T]$$

3. On montre alors que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ r_k \wedge T = 1$

En effet, si $p \in \mathbb{N}^*,\quad p \leq r_k < T,$

$$\begin{cases} p \mid T \\ p \mid r_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, u' \leq T,\ p \cdot u' = T \\ \exists\, u \leq r_k, p \cdot u = r_k \end{cases}$$

Et d'autre part, en reprenant la formule de la division euclidienne,

$$\lambda^k = a \cdot T + r_k \Rightarrow u' \cdot \lambda^k = u' \cdot a \cdot T + u' \cdot r_k \Rightarrow u' \cdot \lambda^k = u' \cdot a \cdot T + u' \cdot \mathrm{p} \cdot \mathrm{u} \Rightarrow u' \cdot \lambda^k = (u' \cdot a + u) \cdot T$$

$$\Rightarrow T \mid u' \cdot \lambda^k$$

Donc d'après ce qui précède, on a nécessairement $u' = T$*, ce qui implique que* $p = 1$

D'*où*

$$r_k \wedge T = 1$$

i.e.

$$T \mid \lambda^K - 1$$

4. Et par l'absurde on voit que $\lambda^K - 1$ ne peut pas être un multiple de la période.

On se propose de voir que $\left(\lambda^K - 1\right)$ *multiple de la période implique que* $u_1 = u_{\lambda - 1}$

Par contraposée on aura donc $u_1 \neq u_{\lambda - 1} \Rightarrow \left(u_n\right)$ *non périodique.*

Supposons donc $u_1 \neq u_{\lambda - 1}$

Pour ce faire, on va appliquer successivement à l'indice de $u_{\lambda - 1}$ *les fonctions suivantes* :

$$\psi^2 \circ \varphi^{K-1}$$

puis on retranche le multiple de la période $\lambda^K - 1$

et on applique $\left(\varphi^{-1}\right)^{K-2} \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$ *pour aboutir au résultat.*

Remarquons que $K > 1$ *car* $K = 1 \Rightarrow T \mid \lambda - 1$

et alors

$$u_1 = u_{\psi^{\lambda-2} \circ \varphi(1)} = u_{\psi^{\lambda-2}(\lambda)} = u_{2\cdot\lambda-2} = u_{\lambda-1}$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.

Par conséquent,

$$\varphi^{K-1}(\lambda - 1) = \lambda^K - \lambda^{K-1}$$

$$\psi\left(\lambda^K - \lambda^{K-1}\right) = E\left(\frac{\lambda^{K+1} - \lambda^K - 1}{\lambda - 1}\right) = E\left(\lambda^K - \frac{1}{\lambda - 1}\right) = \lambda^K - 1$$

$$\psi\left(\lambda^K - 1\right) = E\left(\frac{\lambda^{K+1} - \lambda - 1}{\lambda - 1}\right) = E\left(\frac{\lambda^{K+1} - \lambda}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda - 1}\right) = \frac{\lambda^{K+1} - \lambda}{\lambda - 1} - 1$$
$$= \frac{\lambda^{K+1} - 2\cdot\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

$$\frac{\lambda^{K+1} - 2\cdot\lambda + 1}{\lambda - 1} - \left(\lambda^K - 1\right) = \frac{\lambda^{K+1} - 2\cdot\lambda + 1}{\lambda - 1} - \lambda^K + 1 = \frac{\lambda^K - \lambda}{\lambda - 1}$$
$$= \frac{\lambda\cdot\left(\lambda^{K-1} - 1\right)}{\lambda - 1}$$

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\lambda\cdot\left(\lambda^{K-1} - 1\right)}{\lambda - 1}\right) = \frac{\lambda^{K-1} - 1}{\lambda - 1}$$

$$\psi^{-1}\left(\frac{\lambda^{K-1} - 1}{\lambda - 1}\right) = \lambda^{K-2}$$

$$\left(\varphi^{-1}\right)^{K-2}\left(\lambda^{K-2}\right) = 1$$

On est parti de $\lambda - 1$, *auquel on a appliqué des fonctions ne modifiant pas la valeur de* u

Par conséquent, on obtient que

$$u_1 = u_{\lambda - 1}$$

et la suite n'est pas périodique, ce qui achève cette partie de la démonstration.
Notons qu'on s'est servi de l'égalité suivante :

$\psi \circ \varphi^k(\lambda - 1) = \lambda^{k+1} - 1$ *qui est immédiate.*

En particulier, dans le cas de la suite du lézard comme $u_1 \neq u_2$ (sinon la suite est constante) on a la suite du lézard qui est bien non-périodique.

Lambert Rosique.