Introduction :

La configuration de graines est placée sur une rangée infinie de cases. Bien entendu, cela ne correspond pas à la réalité du tablier de l'awalé. Mais il est commode de faire ce genre d'hypothèse, pour mettre en évidence certaines régularités afin d'en comprendre les causes et d'en proposer un modèle mathématique.

Le tablier est supposée infini, on peut répéter infiniment le semis de la case de gauche.

Définition 1 :

Soit $\varphi : N^N \to N^N$ l'application définie par :

Soit $\varphi(u)_i = \begin{cases} u_{i+1} + 1 \ si\ i < u_0 \\ u_{i+1} \quad\quad\quad \text{sinon} \end{cases}$

Cette fonction est en quelque sorte une idéalisation de la règle de base du jeu de l'Awalé : On considère que u représente un nombre de points par case, et pour obtenir l'image de u , on retire les pions de la première case pour les distribuer dans les cases suivantes consécutivement, puis on oublie la première case. On décrit ici le comportement asymptotique des suites d'itérations d'une suite quelconque par ce procédé.

Définition 2 :

Soient a un entier. On appelle triangle de base a la suite t^a telle que

$t_i^a = \begin{cases} a - i \ pour\ i \leq a \\ 0 \ \ pour\ i > a \end{cases}$

On appelle perturbation de longueur a toute suite ϵ à valeurs dans $\{0,1\}$, de support majoré par a , et non constamment égale à 1 sur $[0, a]$. On appelle quasi-triangle de base a toute suite de la forme $t^a + \varepsilon$ où ε est une perturbation de longueur$a$.

En d'autres termes, un quasi-triangle est un triangle auquel on ajoute 1 à certains des a + 1 premiers termes, mais pas à tous. Si on ajoute 1 à chacun des a + 1 premiers termes du triangle de base a, on obtient le triangle de base a + 1.

Théorème 2 :

Soit S un entier, soient m, k ∈ N, tels que $S = \frac{m(m+1)}{2} + k \; avec \; k \leq m$. Alors pour toute suite u à support fini et de somme S ,

- $(\varphi^n(u))_n$ est ultimement périodique ;
- $(\varphi^n(u))_n$ est périodique si et seulement si u est un quasi-triangle de base m ;
- Si $k = 0$ alors $(\varphi^n(u))_n$ est ultimement constante et sa limite est un triangle.

Lemme 1 : Pour toute suite u, $\varphi(u) = u$ si et seulement si u est un triangle .

Démonstration : Soit t^a le triangle de base a . On a $(t^a)_0$ = a , donc pour tout $i < a$, on a $\varphi(t^a)_i$ = t^a_{i+1} + 1 = $(a -(i+1)) + 1 = a - i$ = t^a_i . Pour tout $i > a$, on a $\varphi(t^a)_i$ = t^a_{i+1} = 0 = t^a_i . Enfin, on a $\varphi(t^a)_a$ = $t^a_{a+1} = 0 = t^a_a$, donc

Réciproquement, supposons $\varphi(u) = u$. Par définition, pour tout $i < u_0$ on a donc $u_i = \varphi(u)_i = u_{i+1} + 1$, donc $u_{i+1} = u_i - 1$, d'où on déduit par récurrence que $u_{i+1} = u_0 - i - 1$. On a donc en particulier u_{u_0} = 0 . Pour $i \geq u_0$, on a $u_i = \varphi(u)_i = u_{i+1}$, donc par récurrence on a $u_i = 0$ pour tout $i \geq u_0$. Ainsi on a $u = t^{u_0}$.

Lemme 2 : Soit $t^a + \varepsilon$ un quasi-triangle. Pour tout entier n notons ε^n , la perturbation telle que $\varepsilon^n_i = \varepsilon_{(i+n) mod\, (a+n)}$ pour tout $i \leq a$. Alors pour tout n on a $\varphi^n(t^a + \varepsilon) = t^a + \varepsilon^n$. La suite $(\varphi^n(t^a + \varepsilon))_n$ est donc périodique .

Démonstration : Il est clair qu'il suffit de prouver l'égalité pour n = 1 . Par la lemme 1 , le triangle t^a est un point fixe de $\varphi, donc \; on \; a$

$$\varphi(t^a + \varepsilon)_i = \begin{cases} (t^a + \varepsilon)_{i+1} + 1 = t^a_{i+1} + 1 + \varepsilon_{i+1} = t^a_i + \varepsilon^1_i \; si \; i < a \\ (t^a + \varepsilon)_{a+1} = t^a_{a+1} + \varepsilon_0 = \varepsilon_0 = t^a_a + \varepsilon^1_a \; si \; i = a \\ (t^a + \varepsilon)_{i+1} = 0 = t^a_i + \varepsilon^1_i \; si \; i > a \, . \end{cases}$$

On a donc bien $\varphi(t^a + \varepsilon)$=$t^a + \ \varepsilon^1$, et le cas général se déduit par récurrence. Comme ε^k est la permutation circulaire de k rangs vers la gauche des $a+1$ premiers termes de ε , on a $\varphi^{a+1}(t^a + \varepsilon)$ = $t^a + \varepsilon$, donc la suite $(\varphi^n(t^a + \varepsilon))_n$ est périodique et sa période divise $a+1$.

Lemme 3 : Pour tout entier a , notons $[a]$ la suite qui vaut 1 en a et 0 partout ailleurs . Pour toute suite u et tout entier a , on a :

$$\varphi(u + \ [a]) = \begin{cases} \varphi(u) + [a-1] \; si \; a \geq 1 \\ \varphi(u) + \ [u_0] \quad si \; a = 0 \end{cases}$$

Pour tout n , il existe un b tel que $\varphi^n(u + [a]) = \ \varphi^n(u) + [b]$.

<u>Démonstration :</u> Le cas de $\varphi(u + \ [a])$ avec $a \geq 1$ est évident par définition de φ . Pour le cas $\varphi(u + \ [0])$, il suffit de remarquer que l'on a $(u + [0]) = u_0 + \ 1$ et donc que $\varphi(u + [0])_i$ est $u_{i+1} \ + 1$ si $i \leq u_0$ et u_{i+1} sinon . Le cas de $\varphi^n(u + [a])$ se déduit immédiatement par récurrence.

Lemme 4 : Pour toute suite u à support fini , il existe un n tel que $\varphi^n(u)$ est un quasi-triangle .

<u>Démonstration :</u> On raisonne par récurrence sur S=$\sum_i u_i$. Le résultat est évident pour S=0 . Supposons le résultat connu pour un certain S et considérons une suite u de somme S+ 1. Considérons un entier b quelconque tel que $u_b \geq 1$, et posons $u = v - [b]$. Par hypothèse de récurrence, il existe un n tel que$\varphi^n(u) = \varphi^n(u) + [c]$. Posons $n_0 = n + c$, par la lemme 3 on a donc $\varphi^{n_0}(u) = \varphi^c(\varphi^n(\text{v}) + [c]) = \ \varphi^{n_0}(u) + \ [0]$. Par la lemme 2 , $\varphi^{n+c}(v)$ est un quasi-triangle $t^a + \varepsilon, et$ on a donc $\varphi^{n_0} \ (u) = \ \ t^a + \varepsilon + [0]$.
Supposons ε_0= 1 , on a alors $(t^a + \varepsilon)_0$ = $a+1$, donc par les lemmes 2 et 3 on a :

$$\varphi^{n_0+1}(u) = \ \varphi(t^a + \varepsilon + [0]) = \ \ t^a + \varepsilon^1 + [a+1]$$

$$\varphi^{n_0+a+2}(u) = \varphi^{a+1}(t^a + \varepsilon^1 + [a+1]) = \ \ t^a + \varepsilon^{a+2} + [0] = \ t^a + \varepsilon^1 + [0]$$

En appliquant le même raisonnement à chaque ε^i ,on en déduit par récurrence que pour tout k tel que $\varepsilon_i = 1$ pour chaque $i < k$, on a $\varphi^{n_0+k(a+2)}(u) = t^a + \varepsilon^k + [0]$.

Par définition des quasi-triangles, ε n'est pas égale à 1 en tout point de $[0, a]$, donc il existe un$k \leq a$, vérifiant la propriété précédente et tel que $\varepsilon_k = 0$. Dans ce cas $\varepsilon_0^K = 0$, $donc$ ε_k + [0] est une perturbation de longueur a . La suite $t^a + \varepsilon^k + [0]$ est donc un quasi-triangle, de base $a + 1$ si ε_i^k = 1 pour chaque $1 \leq i \leq a$, de base a sinon.

Démonstration du théorème : Soit u une suite à support fini de somme S . Par le lemme 4 , il existe un n tel que $\varphi^n(u)$ est un quasi-triangle . Par la lemme 2 la suite $(\left(\varphi^n(u)\right)_n$ est donc périodique à partir du rang n . Supposons que cette suite est périodique (dès le rang 0) , de période $p. \varphi^n(n)$ est un quasi-triangle , donc par la lemme 2 tous ses itérés en sont aussi , c'est en particulier le cas $\varphi^{np}(u)$ qui est égal à u. Ainsi $(\varphi^n(u))_n$ est périodique si et seulement si u est un quasi-triangle . Il est clair que la somme d'un quasi-triangle $t^a + \varepsilon$ est $a(a+1)/2$ +$\sum_{i=0}^{a} \varepsilon_i$, et comme les ε_i ne sont pas tous égaux à 1 leur somme est comprise entre 0 et a . Si on écrit $S = \frac{m(m+1)}{2} + k \ avec\ k \leq m$; on a donc $a = m$ et $k = \sum_i \varepsilon_i$, ce qui prouve la propriété voulue pour la base du quasi-triangle . Supposons maintenant $k = 0$. Le quasi-triangle $\varphi^n(u)$, s'écrit donc $t^m + \varepsilon \ avec\ \sum_i \varepsilon_i = k = 0$, donc $\varepsilon = 0\ et\ \varphi^n(n)$ est un triangle . Par la lemme 1 la suite est stationnaire à partir de n .

Corollaire 1 : Soit $S = \frac{m(m+1)}{2} + K \ avec\ k \leq m$. Parmi les suites de somme S

- Le nombre de suites appartenant à un cycle est $\binom{m+1}{k}$;
- Si $k \neq 0$, le nombre de cycles est le nombre de k-uplets $(a_1, \ \dots \ , a_k)$ d'entiers non nuls de somme $m + 1$, considérés à permutation circulaire près .

Démonstration : Les suites de somme S appartenant à un cycle sont les quasi-triangles t^m+ε où ε est une perturbation de longueur m et de somme K .

La fonction $\varepsilon \to \varepsilon^{-1}(\{1\})$ établit une bijection entre ces suites et les parties de $[0\ , m]$ à K élements. Par la lemme 2 , deux suites $t^m + \varepsilon\ et\ t^m + \mu$ sont dans le même cycle si et seulement si il existe un n tel que $\varepsilon^n = \mu$. Pour une perturbation ε, soit i le plus petit entier tel que $\varepsilon_m^i = 1$, pour chaque $1 \leq j \leq k$ notons e_k la position du $k - ième\ 1\ dans\ \varepsilon$, et appelons $f(\varepsilon)$ le k-uplet $(e_1 + 1\ , e_2 - e_1\ ,\ \ \dots\ , e_k - e_{k-1})$. Alors la somme de $f(\varepsilon)$ est $e_k + 1$, qui est égal à $m + 1$ par construction , et il existe n tel que $\varepsilon^n = \mu$ si et seulement si $f(\varepsilon)$ et $f(\mu)$ sont permutations circulaires l'un autre . De plus f est surjective parmi les k-uplets de somme $m + 1$, ce qui conclut la démonstration sur le nombre de cycles .

Résumé :

Certaines configurations ont un comportement qui les amène à converger vers un groupe de marche. La configuration 3,4,2,1 est précisément un exemple de ce type de configuration . En semant la case de gauche on obtient 5,3,2. Si l'on réitère le semis plusieurs fois (en semant toujours la case de gauche), on constate que la configuration se transforme après plusieurs étapes en 4,3,2,1 qui est un groupe de marche. A partir de cet état, le semis ne produit plus aucune modification car le groupe de marche est un état stable .3421→532→43111→4222→3331→442→5311→42211→3322→433→4411→5221→33211→4321.

La règle de déplacement peut aussi conduire à des comportements périodiques, c'est le cas de la configuration 211 puis 22, puis 31, puis on revient à 211. Cet exemple est donc périodique de période 3.

La règle de déplacement peut aussi conduire à des comportements ultimement périodique, c'est le cas de la configuration
722→3311111→422111→33221→4331→4421→5321→43211→4322→

Puisque l'ensemble de formes que peut prendre une configuration est finie, on retombe nécessairement à un certain moment sur une forme déjà vue précédemment.

Etudes des configurations périodiques :

Il est facile de voir qu'une configuration est périodique. On définit les groupes de marches augmentés. Par définition les groupes de marches augmentés contient un groupe de marche sous-jacent auquel on a ajouté une graine dans certaines cases. Lorsqu'on joue sa case de gauche , on reconstitue a une case de distance vers la droite , une nouvelle configuration qui contient elle aussi un groupe de marche sous-jacent avec une graine supplémentaire dans certaines .Or si l'on considère la séquence de zéro et de un indiquant l'absence ou la présence de cette graine supplémentaire , on observe que lors de ce déplacement , la séquence subit exactement une permutation circulaire d'un élément , c'est-a-dire que son premier élément est placé a la fin . Par exemple pour la configuration périodique 553211, on obtient les déplacements suivant :
553211→64322→543311→54422→55331→644211→553221

Le groupe de marche sous-jacent est 54321. Pour la séquence de zéro ou un indiquant les graines additionnelles, on obtient les permutations circulaires suivantes :

010001→100010→000101→001010→010100→101000→ 010001

En conséquence en réitérant le processus, tous les éléments de cette séquence vont être déplacés à la fin l'un après l'autre, et on reviendra à la séquence initiale.

Conjecture 1 :

Pour la configuration de graine suivante : $n, n, n-1, n-2, n-3, \ldots, 3, 2, 1$ qui est une configuration sous-jacente du groupe de marche $n+1, n, n-1, n-2, n-3, \ldots, 3, 2, 1$.

Cette contient une graine supplémentaire dans la première case. Or si l'on considère la séquence de zéro et de un indiquant l'absence ou la présence de cette graine supplémentaire, on observe que lors de ce déplacement, la séquence subit exactement une permutation circulaire de 1 sur une configuration contenant n+1 cases, c'est-a-dire on a besoin de n+1 semis consécutives pour retomber sur la même configuration du départ.

$1, 0, 0, \ldots, 0, 0$ (Où il y a n $zéros$ consécutifs .)

$0, 1, 0, \ldots, 0, 0$

$0, 0, 1, \ldots, 0, 0$

.

.

.

$0, 0, 0, \ldots, 1, 0$

$0, 0, 0, \ldots, 0, 1$

Et donc après $n+1$ semis consécutifs on retombe sur la configuration du départ $1, 0, 0, \ldots, 0, 0$.

Quelques exemples d'illustration de la conjecture 1 :

6654321, après 7 semis successives on retombe sur le même configuration du départ :6654321→765432→7654311→7654221→7653321→764432→7554321 →6654321

554321, après 6 semis successives on retombe sur la même configuration du départ 554321→65432→654311→654221→653221→644321→554321

44321, après 5 semis successives on retombe sur le la même configuration du départ : 44321→5432→54311→54221→53321→44321

3321, après 4 semis successives on retombe sur la même configuration du départ : 3321→432→4311→4221→3321

221, après 3 semis successives on retombe sur la même configuration du départ. 221→32→311→221

Conjecture 2 :

$n+2\ , n, n\ , n-1, n-2, n-3,\ \ldots.\ , 3\ , 2\ , 1$ donne la configuration suivante après un seul semis : $n+1\ , n+1, n\ \ , n-1, n-2, n-3,\ \ldots.\ , 3\ , 2\ , 1$ et on retombe sur le cas de la conjecture 1 , et donc va tomber après n+2 semis sur la même configuration du départ $n+1\ , n+1\ \ , n-1, n-2, n-3,\ \ldots.\ , 3\ , 2\ , 1$.

Conjecture 3 :

La configuration suivante $1,2,3,4, \ldots. , n-1\ , n$ converge après $2n-3$ semis successives au groupe de marche $n, n-1, n-2,\ \ldots\ \ , 3,2\ , 1$

Conjecture 4 :

La configuration $n, n-1\ , \ldots. , k, k, \ldots. , 2,1$ converge après $n+1$ semis (le nombre de semis est indépendant de K) à la même configuration du départ, pour tout entier K tel que $1 \leq K \leq n$.

Quelques exemples d'illustration de la conjecture 4 :

44321→5432→54311→54221→53321→44321

43321→4432→5431→54211→53221→43321

43221→4332→4431→5421→53211→43221

43211→4322→4331→4421→5321→4321

La configuration sous-jacente de la configuration $n, n-1, \ldots\ , k, k, \ldots\ , 2,1$

est la configuration$n, n-1, \ldots , k, k-1, \ldots , 1,0$. Or si l'on considère la séquence de zéro et de un indiquant l'absence ou la présence de cette graine supplémentaire, 0,0,0, … ,1,1,1, ..,1 (où il y a $n+1-k$, zéros et k un) . donc après $n+1=(n+1-K)+K$ permutations circulaires on retombe sur le cas de la configuration de départ $n, n-1, \dots, k, k, \dots, 2,1$.

Conjecture 5 :

La configuration suivante :

$n,(n-1),(n-2),\dots\dots,3,2,1, n,(n-1),(n-2),\dots\dots,3,2,1$ Converge :

- Après un semis à la configuration suivante : $n, n-1, \dots, 4, 3, 2, n+1, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$.
- Après n semis consécutives à la configuration suivante $2n, 2(n-1), 2(n-2), \dots, 2(3), 2(2), 2(1)$.
- Apres n+1 semis consécutives $2n-1, 2(n-1)-1=2n-3, 2(n-2)-1=2n-5, \dots, 7,5,3=2(n-(n-2))-1, 1=2(n-(n-1))-1, 1,1,1, \dots, 1,1$ (avec n un consécutifs).
- Après 2n-1 semis consécutives à la configuration suivante : $n+1, n, n, n, \dots, n, n, n$ (où il y a $n+1$, n consécutives) .
- Après 3n semis consécutives a la configuration $2n, n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 3,3,2,2,1,1$.
- Après 3n+1 semis successives a la configuration : $n, n, (n-1), (n-1), \dots, 3,3,2,2,1,1$.

Quelques exemples d'illustration de la Conjecture 5 :

2121→231→42→3111→222→33→411→2211→321→ 321

321321→324421→3531→642→531111→42222→3333→444→5511→62211→32211→3321→432→4311→4221→3321

43214321→4325321→436421→47531→8642→75311111→6422222→533333→44444→5555→66611→772211→8332211→44332211→5443211→554321→65432→654311→654221→653321→644321→554321.

Conjecture 6 :

La configuration contenant $n+1$, n consécutives $\{n,n,n,\dots,n,n\}$ donne après un seul semis $n+1,n+1,n+1,\dots.,n+1,n+1$.

Conjecture 7 :

La configuration suivante $n,(n-1),(n-2),(n-3),\dots..,(n-p),n,(n-1),(n-2),\dots,(n-p)$ Converge après plusieurs semis consécutifs à la configuration suivante :

$n,n,(n-1),(n-1),(n-2),(n-2),(n-3),(n-3),\dots.,(n-p),(n-p)$

Quelques exemples d'illustration de la conjecture 7 :

543543→54654→57651→87621→87321111→84322221→54333321→5444421→555531→66642→775311→8642211→75332211→6443322→554433→

321321→32421→3531→642→531111→42222→3333→444→5511→62211→332211→

3232→343→541→52111→32221→3331→442→5311→3322→

Conjecture 8 :

Après un certain nombre de semis de la configuration $2(n-p),\dots..,2(n-2),2(n-1),2n$. On tombe sur la configuration $n,n,(n-1),(n-1),(n-2),(n-2),\dots.,(n-p),(n-p)$

Conjecture 9 :

Un seul semis de la configuration suivante $n,n,(n-1),(n-2),(n-3),\dots\dots,3,2,1,1$ Aboutit à la configuration suivante $(n+1),n,(n-1),(n-2),\dots\dots,3,2,1.$

Conjecture 10 :

- Pour une configuration contenant <u>deux</u> un consécutifs : 11
- Pour une configuration contenant <u>cinq</u> (deux +3) ,2 consécutifs, on a 22222→3322→
- Pour une configuration contenant <u>huit</u> (cinq +3) ,3 consécutifs, on a 33333333→4443333→554433→
- Pour une configuration contenant <u>onze</u> (huit+3) 4 consécutifs, on a 44444444444→5555444444→666554444→77665544→
- Pour une configuration contenant <u>quatorze</u> (onze+3), 5 consécutifs on a : 55555555555555→66666555555→7777665555→888776655→

9988776655

- Pour une configuration contenant <u>dix-sept</u> (quatorze+3) , 6 consécutifs , on a : 66666666666666666→77777766666666→8888877666666→ 10 10 10 99887766→11 11 10 10 99887766→
- Pour une configuration contenant <u>vingt</u> (dix-sept +3) 7 consécutifs, on a :

77777777777777777777→88888887777777777777→99999988777777777→ 10 10 10 10 10 998877777777→12 12 12 11 11 10 10 99887777→ 13 13 12 12 11 11 10 10 998877

- Pour une configuration contenant <u>vingt-trois</u> (vingt+3) 8 consécutifs, on a :88888888888888888888888→99999999888888888888888→ 10 10 10 10 10 10 10 9988888888888→ 11 11 11 11 11 11 10 10 99888888888→ 12 12 12 12 12 11 11 10 10 998888888888→ 13 13 13 13 12 12 11 11 10 10 9988888888→ 14 14 14 13 13 12 12 11 11 10 10 998888→ 15 15 14 14 13 13 12 12 11 11 10 10 9988

- Pour une configuration contenant <u>vingt-six</u> (vingt-trois +3) ,9 consécutifs , on a :

99999999999999999999999999→
10 10 10 10 10 10 10 10 10 999999999999999→
11 11 11 11 11 11 11 11 10 10 999999999999→
12 12 12 12 12 12 12 11 11 10 10 999999999999999→
14 14 14 14 14 13 13 12 12 11 11 10 10 99999999→

15 15 15 15 14 14 13 13 12 12 11 11 10 10 999999→

16 16 16 15 15 14 14 13 13 12 12 11 11 10 10 9999→

17 17 16 16 15 15 14 14 13 13 12 12 11 11 10 10 99→

Donc Une configuration contenant $3n-1$, n consécutives converge au groupe $(2n-1)(2n)\ldots n,n$.

Conjecture 10 :

Les configurations $\{(n+1)(n+1)(n+1)\ldots\ldots(n+1)(n+1)(n+1)\}$ où il y a n , $(n+1)$ consécutifs, placées l'un a coté de l'autre.
Donne après n semis consécutifs :

$$n, n, (n-1), (n-1), (n-2), (n-2), \ldots, 2,2,1,1$$

Quelques Exemples d'illustration de la conjecture 11:

33→411→2211

444→5511→62211→332211

5555→66611→772211→8332211→44332211

66666→777711→8882211→99332211→10 44332211→5544332211

Conjecture 11 :

La configuration suivante : $\{n, n, n \ldots\ldots, n, n\}(n+1\ fois)$, $n+1, \{n, n, n \ldots\ldots, n, n\}$ $(n+1\ fois)$ donne après un certain nombre de semis successives la configuration suivante $2n+1, 2n, \ldots\ldots, 3,2,1$.

Quelques Exemples d'illustration de la conjecture 121:

11211→2211→321

2223222→333222→44322→5433→54411→55221→63321→443211→54321

333343333→44443333→665443→765541→7665211→7763221→
8743321→85443211→65543221→6654331→765442→7655311→7664221→7
753321→8644321→75543211→6654322→765433→ 7663321→7744321→

Conjecture 13 :

Le semis de la configuration suivante $n,(n-1),(n-2),\ldots,3,2,1,1,2,3,\ldots,(n-2),(n-1),n$ donne un comportement symétrique et le comportement symétrique s'arrête quand on arrive à une configuration de rangées de n cases contenant chacune n+1 billes.

Quelques exemples d'illustration de la conjecture 13 :

2112→222→33→411→2211→321→321

321123→32223→3333→444→5511→62211→332211→43311→4422→5331→44211→5322→43311

43211234→4322234→433334→44444→5555→

5432112345→543222345→54333345→5444445→555555→66666→

654321123456→65432223456→6543333456→654444456→65555556→6666666→777777→

76543211234567→7654322234567→765433334567→76544444567→7655555567→766666667→77777777→8888888