FIOL Julian

L2 Info

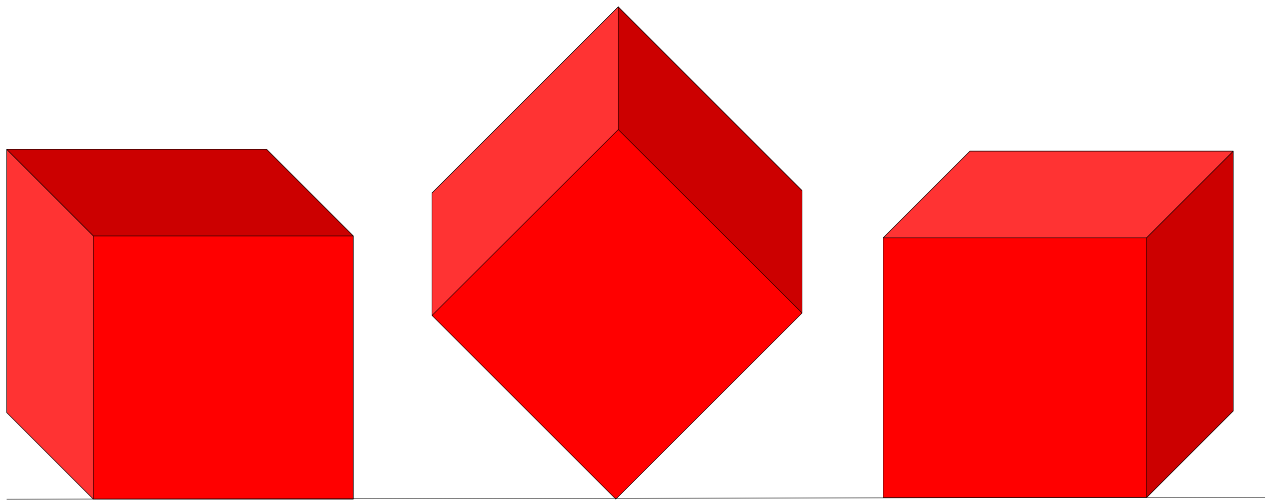
Rapport Personnel Maths en Jeans 1 - 2010 – 2011

Enseignants responsables :

Laurent BEDDOU

Christian MAUDUIT

LE CULBUTO



Le 18 mai 2011

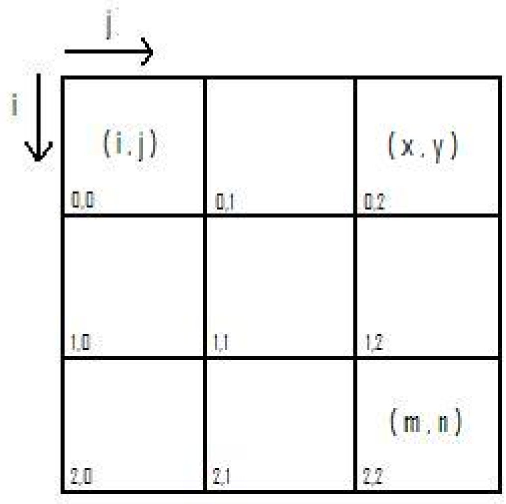
SOMMAIRE :

Partie Personnelle :

Avec l'aide de BUISSON Fabien et JULIEN Anthony, nous nous sommes intéressés à la culbute de polyèdre sous la forme d'un cube qui bascule sur lui même le long de ses arêtes.

Les premières questions ont étaient traitées conjointement donc nous aurons plus ou moins la même chose au début de notre rapport avant de se concentrer sur une partie propre à nous même.

Nous nous sommes d'abord intéressés sur les possibilités de chemins sur un damier.



représentation de la numérotation des cases sur un damier

Combien y'a t-il de chemins différents entre entre une case (i,j) et une case (m,n) :

Nous nous sommes aidés de notre cours de probabilités et statistiques de l'année dernière et plus particulièrement de la formule suivante :

$$\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q} \quad \text{chemins possibles}$$

en sachant que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

<u>démonstration :</u>

$$\binom{n+1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-p) \times (n-1)!}{(n-p)p! \times (n-1-p)!} + \frac{p \times (n-1)!}{p \times (p-1)! \times \big((n-1) - (p-1)\big)!}$$

$$= \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} + \frac{p \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!}$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{p! \times (n-p)!} \quad \boxed{= \frac{n!}{p! \times (n-p)!}}$$

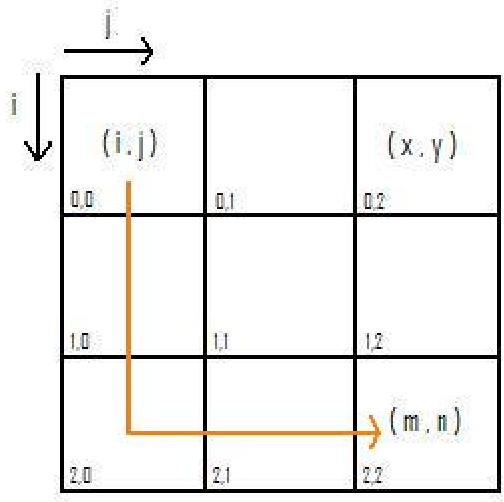
et nous en avons donc déduit que le nombre de plus courts chemins pour aller d'une case (i,j) à une case (m,n) est :

$$\binom{(m-i)+(n-j)}{m-i} = \binom{(m-i)+(n-j)}{n-j} = \frac{\big((m-i)+(n-j)\big)!}{\begin{matrix}(n-j)! \\ \text{ou} \\ (m-i)!\end{matrix} \times \left(\big((m-i)+(n-j)\big)! - \begin{matrix}(n-j)! \\ \text{ou} \\ (m-i)!\end{matrix}\right)}$$

Le plus court chemin entre une case (i,j) et une case (m,n) comprend le nombre de culbutes suivant :

$$((m-i)+(n-j))$$

car le plus court chemin consiste à "descendre" en face de la case d'arrivée puis d'aller vers celle-ci et donc le nombre de culbutes nécessaires est égale à l'addition de la soustraction de leurs coordonnées respectives.



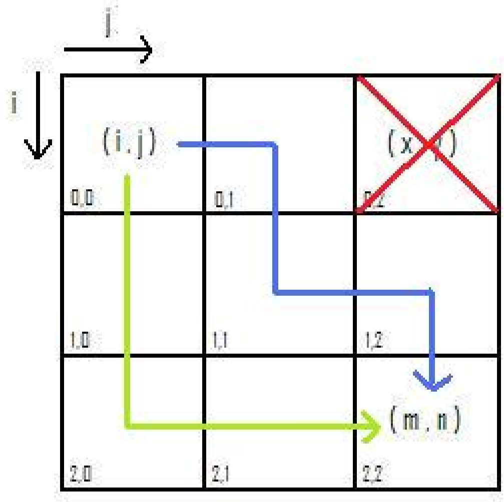
Un des plus court chemin pour aller de (i,j) à (m,n)

Le nombre de culbutes pour le plus court chemin entre 2 cases (i,j) et (m,n) en imposant un point de passage (x,y) est égal à :

$$((x-i)+(y-j) + (m-x)+(n-y))$$

car il suffit en fait de calculer le plus court chemin pour aller de (i,j) à (x,y) puis de (x,y) à (m,n) et de les additionner.

Le nombre de culbutes plus court chemin entre 2 cases en imposant un point de non-passage :



Ce n'était pas une question très intéressante car il suffit de voir qu'il y a plusieurs plus court chemins possible pour aller de (i,j) à (m,n) et donc même en bloquant une case il existe toujours au moins un autre plus court chemin permettant de rejoindre les 2 cases.

Peut-on aller d'une case (i,j) vers une case (m,n) en gardant la même orientation :

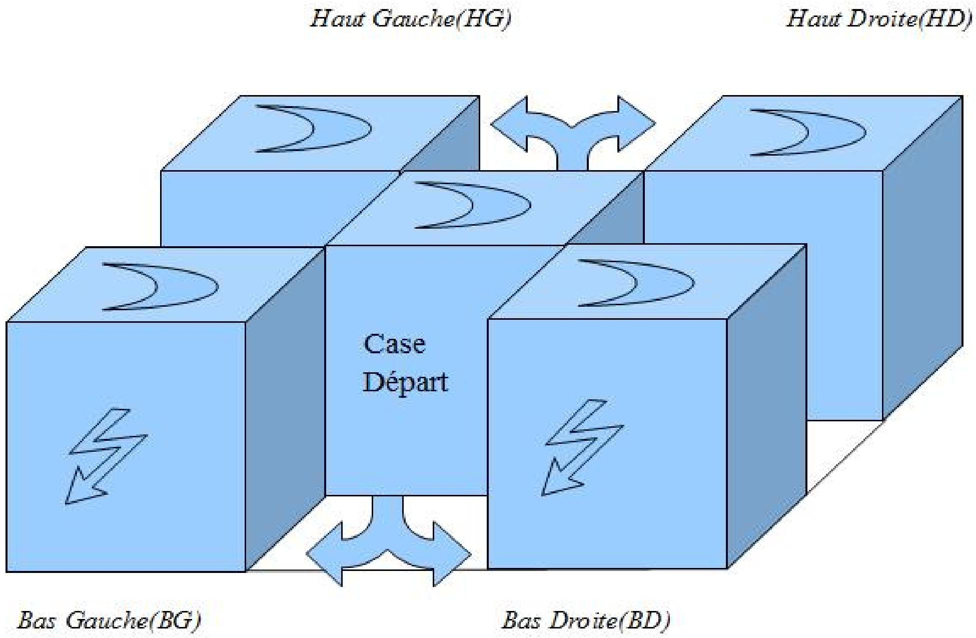
La question revient à se demander s'il est possible de simuler un glissement entre 2 cases.

On remarque quand faisant 4 culbutes successives dans un même sens horizontalement ou verticalement on retrouve la même orientation du cube.

→ On peut donc dire qu'il est possible de simuler un glissement entre 2 cases dans la mesure où l'on peut trouver un chemin dont la propriété suivante se vérifie :

propriété : une simulation de glissement est possible si le nombre de culbutes horizontales est un multiple de 4 ET si le nombre de culbutes verticales est également un multiple de 4.

On a aussi trouvé qu'il était possible de simuler un glissement sur une diagonale :



en prenant comme repère :

- une case vers le HAUT : H
- une case vers le BAS : B
- une case vers le GAUCHE : G
- une case vers le DROITE : D

et en faisant les suites de rotations suivantes :

Pour aller en haut à gauche : B,G,H,D,H,G.

Pour aller en haut à droite : B,D,H,G,H,D.

Pour aller en bas à gauche : G,B,D,B,G,H.

Pour aller en bas à droite : D,B,G,B,D,H.

Nous avons également remarqué qu'il est impossible d'aller d'une case (i,j) à une case (i,j+1) , (i,j+3) ou (i+1,j) , (i+3,j). Les cas (i,j+2) et (i+2,j) peuvent être atteintes par une succession de 2 glissement sur les diagonales.

<u>Conclusion</u> : on ne peut simuler un glissement que sur les diagonales en utilisant le nombre de fois nécessaires la suite de culbutes décrites ci-dessus ou entre 2 cases espacés d'un nombre de cases verticales et horizontales multiples de 4.

Nous nous sommes ensuite posé la question de savoir combien il y a de possibilités pour revenir à une position de départ (i,j) avec un nombre de culbutes défini préalablement ?

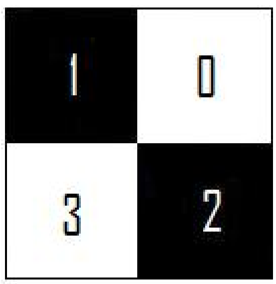
Nous avons essayé en utilisant des suites de trouver une formule générale :

$$U_2 = 4$$
$$U_4 = 4*(U_2 -1)=12$$
$$U_6 = 4*(U_4 -1)=44$$
$$\vdots$$
$$U_{2n} = 4*(U_{2n-2} -4)$$
$$U_{2n+4} = 4 * U_{2n-2}$$
$$U_2+U_4+U_6+\ldots+U_{2n} = 4(U_2+U_4+U_6+\ldots+U_{2n})-4*(n-2)$$
$$U_2+U_4+U_6+\ldots+U_{2n} = \frac{4*(n-2)}{3}$$

Mais celle-ci s'est avérée fausse car elle oubliait les cas de promenades et d'oscillations.
N'ayant pas trouvé mieux nous avons voulu restreindre le problème sur des damiers finis.

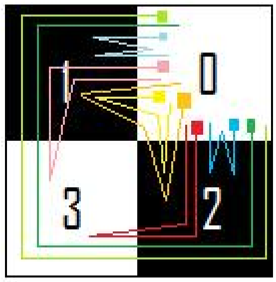
C'est sur cette question du nombre de possibilités pour partir d'une case (i,j) et y revenir par n'importe quel chemin en un nombre défini de culbutes sur un damier fini que je me suis intéressé.

Je me suis surtout penché sur le damier 2x2 :



Représentation des cases sur un damier 2x2

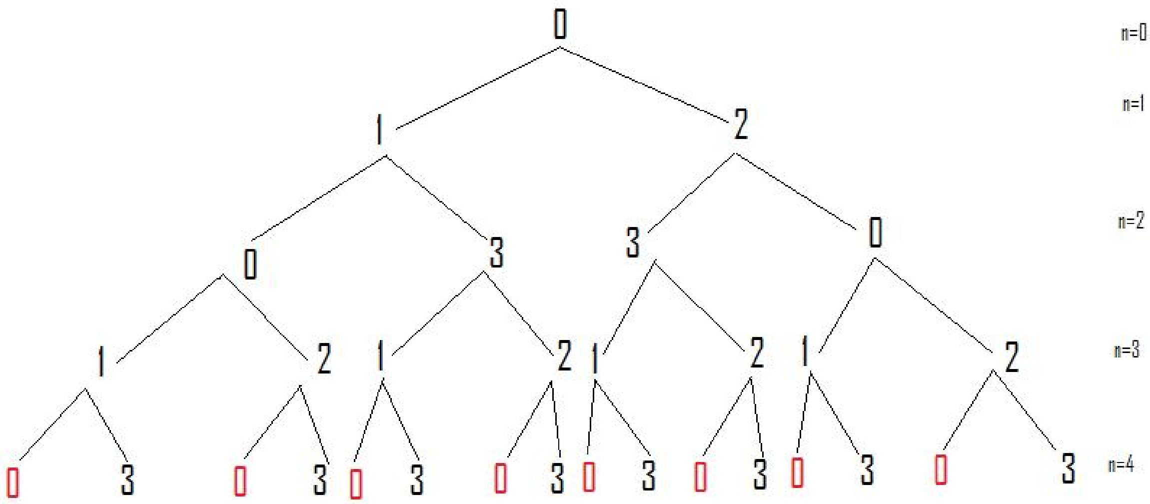
J'ai commencé par essayer de les faire à la main mais c'est vite devenu impossible à gérer car apparemment le nombre de chemins possibles augmente assez rapidement, pour un nombre imposé de 4 culbutes, pour partir de la case 0 et y revenir il y a 8 possibilité (en prenant en compte les aller-retours, les promenades et les oscillations) :



damier 2x2, 4 coups, 8 possibilités

Donc imaginez si je veux pour 12 coups le damier serait très rapidement illisible, j'ai donc du penser à une autre approche.

Je me suis alors intéressé aux arbres binaires en donnant comme racine la case de départ (ici 0) et en y branchant récursivement à ses fils chaque case atteignable.
Le degré de profondeur de l'arbre correspond au nombre de coups.
Le nombre de 0 situé sur la ligne du nombre de coups désiré est le nombre de solutions.



Arbre des solutions d'un damier 2x2 pour un nombre de 4 culbutes

On remarque bien sur la ligne du n=4 les 8 solutions, pour connaître les chemins parcourus par le cube, il suffit de suivre le chemin de la racine jusqu'aux 0 rouges.

Il est aussi intéressant de remarquer que pour les n impair il n'y a pas de 0 sur la ligne, c'est à dire qu'il n'y a pas de solutions. On démontre qu'il faut obligatoirement un nombre pair de culbutes pour trouver une solution.

Démonstration : un aller-retour contient un nombre pair de culbutes.

On note k un déplacement d'une case vers une autre.
Soit A et B deux cases distinctes, un chemin de l'une vers l'autre est composé d'un aller de A vers B suivi d'un retour de B vers A.
On a donc 2 fois le déplacement d'une case vers une autre soit 2*k.
Or 2k est un multiple de 2 et tout multiple de 2 est pair.
Donc un aller-retour contient un nombre pair de culbutes.

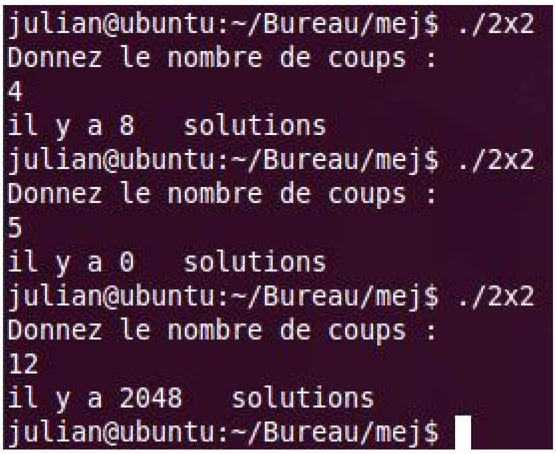
Ce qui induit le théorème suivant :

Théorème :

Pour que l'aller-retour soit vérifiable il faut un nombre pair de culbutes et donc un nombre pair de coups.
Si le nombre de coups est impair, le problème ne sera jamais satisfiable.

Mais avec cette manière encore, bien que plus lisible que la première, devient rapidement ingérable, le nombre de solutions étant trop important pour pouvoir dessiner un arbre.

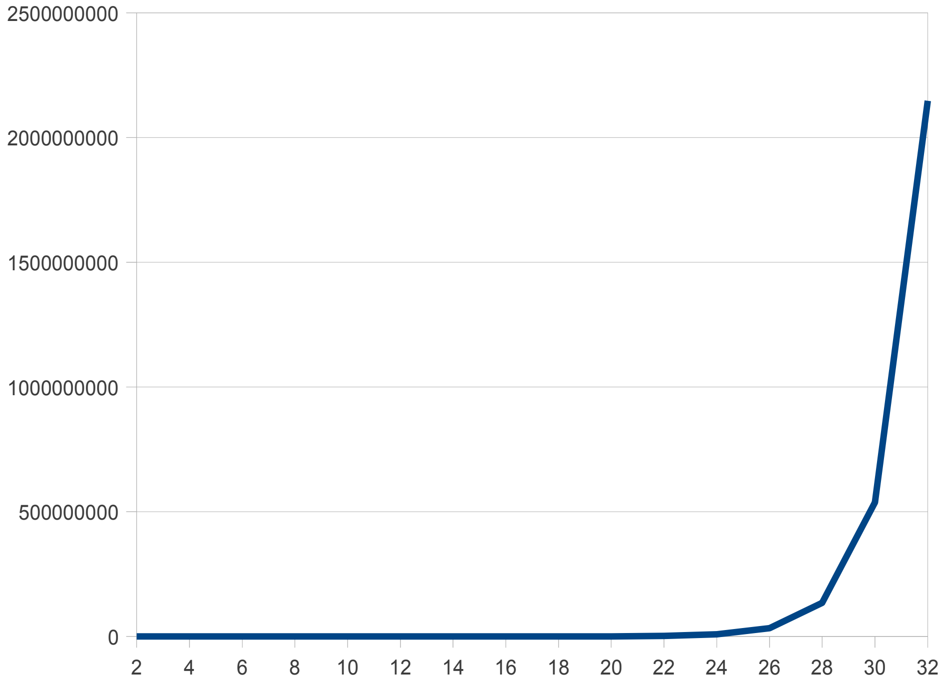
La 3ème solution a été de créer un programme informatique qui sera mieux décrit dans le rapport d'Anthony qui pour un n donné nous sort le nombre de chemins possibles (le programme est un peu différent pour chaque taille de damier).



Screenshot du programme en cours d'exécution

Le programme me permet donc d'obtenir les résultats suivants :

	2x2
2	2
4	8
6	32
8	128
10	512
12	2048
14	8192
16	32768
18	131072
20	524288
22	2097152
24	8388608
26	33554432
28	134217728
30	536870912
32	2147483648
34	**>Uint_Max**



On peut observer que les résultats augmentent de manière exponentielle et donc la seule manière d'arriver à ces résultats était une approche informatique.

D'autres tableaux de résultats et leur courbes peuvent être trouvés dans le rapport commun concernant des tailles de damier différentes.

Mais même un ordinateur à ses limites, et passé le n=32 (pour le damier 2x2), la limite de calcul de l'ordinateur est atteinte (Uint_Max= 4 294 967 295).

Avec les 16 résultats obtenu et en tâtonnant un peu je suis arrivé à la formule suivant :

$$\text{nombre de solutions} = \left(2 * 4^{\left(\frac{n}{2} - 1\right)}\right)$$

avec n le nombre de coups choisi.

A partir de là je me suis intéressé à savoir le nombre de chemins que l'on trouverai si on obligeait un coup quelconque.

Après quelques tests à la main je me suis aperçu que :

En obligeant le **1er** coup on divise par 2 le nombre de solutions.

En obligeant le **2ème** coup on divise par 2 le nombre de solutions.

En obligeant le **3ème** coup on divise par 2 le nombre de solutions.

→ Donc en obligeant 1 coup, n'importe lequel, on divise par 2 le nombre de solutions.

Puis :

En obligeant 2 coups quelconques on divise par 4 le nombre de solutions.

En obligeant 3 coups quelconques on divise par 8 le nombre de solutions.

D'où la formule suivante :

$$\text{nombre de solutions} = \left(2 * 2^{(\text{nombre de coups obligés } - 1)}\right)$$

.

Bilan Expérience de la Matière :

Au début je pensais qu'en prenant cette option je pourrai travailler en groupe avec des collègues sur un sujet que nous aurions nous mêmes choisi librement, avec un minimum de consignes, que nous pourrions concrétiser comme on le souhaite, ce qui était assez plaisant.

Mais je me suis rapidement rendu compte que toute cette liberté est un piège dans la mesure où nous ne sommes pas habitués à cette liberté de recherche et de travail ce qui nous a un peu dérouté au début et du coup on a était un peu long à se lancer.

Après quelques heures de pataugeage nous sommes quand même arriver à nous mettre dans une bonne dynamique de travail qui nous a permis de travailler dans de bonnes conditions.

Cette matière m'aura également permis d'acquérir de l'autonomie dans ma méthode de travail qui sera bénéfique pour ma future carrière professionnelle. Car dans le monde du travail on aura rarement un chef qui nous donnera des questions auxquelles nous devront répondre mais plutôt un thème général dont nous devront explorer toutes les approches et toutes les pistes pour y répondre de manière optimal dans le but d'augmenter les bénéfices de la compagnie.

J'ai également apprécié le fait qu'on ne reste pas enfermés dans une salle de classe tout au long du semestre mais qu'on ai pas mal bougé, en allant voir différentes conférences et en échangeant avec des personnes extérieurs d'horizon différents. C'était assez amusant de voir les collégiens présenter des sujets d'ordres mathématiques et en plus de ça de les comprendre !

La conférence qui m'a le plus intéressé était celle sur les écritures babyloniennes bien que la moins compréhensible des conférences cela nous a permis de nous ouvrir à d'autres recherches que nous ne verrons probablement plus dans notre vie, surtout que la dame qui était venu le présenter était une des rares au monde à travailler sur ce sujet.

Dans l'ensemble, cette matière est une bonne expérience qui nous aura apporté beaucoup tant au niveau méthodologie de travail que personnel (travail en groupe, apprendre à écouter les autres, leurs remarques et leurs critiques...).

La seule reproche que je pourrais faire c'est qu'au premier cours vous aviez commencé à parler sur le "hasard" qui n'était pas vraiment du hasard, qu'il y avait des règles qui le régissait et que l'on pouvait deviner si quelqu'un avait triché sur le hasard ou bien si on était vraiment face à du vrai hasard. J'ai longtemps attendu que vous fassiez un cours sur ce sujet mais malheureusement nous ne l'avons pas eu. Je ne dit pas que les autres cours n'était pas intéressant, au contraire ! Mais c'est vrai que ce thème là me tenait particulièrement à cœur.

Défi :

Sujet : UN HOMME A LA MER

Deux bateaux, l'Albatros et le Bikini, se déplacent sur un plan d'eau à la vitesse de 35 km/h. Ils suivent deux droites différentes qui sont perpendiculaires. Ils se dirigent vers leur point de rencontre.

L'albatros se trouve à 6,5 km de ce point, et le Bikini à 24 km.

Un homme veut plonger de l'Albatros pour nager vers le Bikini à la vitesse de 1,5 km/h.

Dans combien de minutes devra-t-il plonger afin de nager le moins longtemps possible ?

Vous répondrez en arrondissant à la minute la plus près et, si nécessaire, vous prendrez $\sqrt{2} = 99/70$.

Réponse :

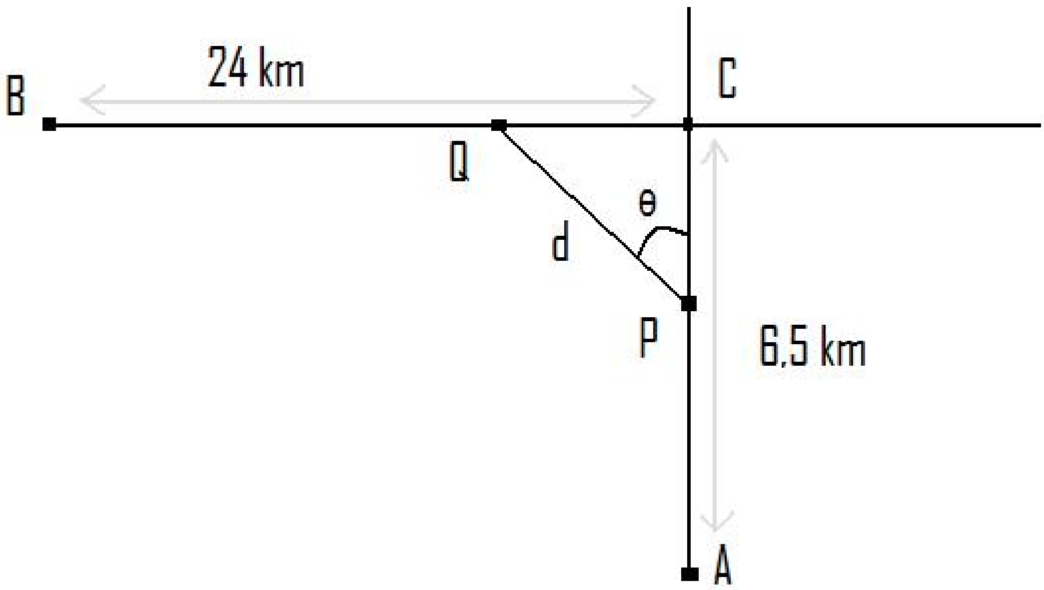


Schéma illustrant le problème

On note A pour l'Albatros, B pour le Bikini, C leur point de rencontre, P le point de plongeon de l'homme et Q son point d'arrivé.

On pose d=PQ et θ=($\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}$)

Il se passe :

$$\frac{6{,}5 - d\cos\theta}{35} + \frac{d}{1{,}5} = \frac{24 - d\sin\theta}{35}$$

entre le moment initial et quand le plongeur rejoint B.

D'où

$$d = \frac{105}{140+6(\sin\theta - \cos\theta)}$$

que l'on doit minimiser.

Or

$$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\,\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$$

l'égalité étant vrai si et seulement si $\theta = 3\pi/4$

Alors :

$$d_{min} = \frac{105\sqrt{2}}{140\sqrt{2}+12} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et donc l'homme doit plonger au bout de :

$$\frac{13 + d_{min}\sqrt{2}}{70}$$

soit environ 1/5 d'heure soit a peu prêt 12 minutes.

Résumé d'un Sujet Hippocampe :

Cf rapport rendu en début de semestre sur les codes correcteurs d'erreurs.