- ***Propriété 1 :***

(U_n) est strictement croissante : $\forall n,\ U_{n+1} > U_n$.

La démonstration est évidente, sachant que $\forall n$ U_{n+1} est toujours au moins égal à $10U_n$.
Ainsi $U_{n+1} - U_n \sim 9U_n > 0$ car $U_n \neq 0$
$U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$.
Donc (U_n) est strictement croissante pour tout n.

- ***Propriété 2 :***

(U_n) n'est pas constante : $\forall n,\ U_{n+1} \neq U_n$.

De même, la démonstration est évidente car $\forall n$ $U_{n+1} = 10U_n$ au moins, donc U_n n'est jamais égal à U_{n+1}. Sauf dans le cas où l'on choisit $U_1 = 0$ mais c'est un cas que l'on a décidé de ne pas étudier car sans intérêt.

- ***Propriété 3 :***

(U_n) n'est pas périodique de période p : $\forall n$ $U_{n+p} \neq U_n$.

La suite (U_n) dépend des indices n et des modulos appliqués, il ne peut y avoir de période, la suite peut presque être vue comme aléatoire.

- ***Propriété 4 :***

(U_n) n'est pas une suite arithmétique. $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \neq U_n + R$ où R est un réel fixé constant.

Il suffit de prendre un contre-exemple pour montrer que $U_{n+1} - U_n$ n'est pas égal à une constante.
Ex : $U_1 = 2$
$U_2 = 20$
$\Rightarrow U_2 - U_1 = 20 - 2 = 18$
$U_3 = 202$
$\Rightarrow U_3 - U_2 = 202 - 20 = 182$
Donc $U_3 - U_2 \neq U_2 - U_1$
Donc $U_{n+1} - U_n \neq$ constante.

- ***Propriété 5 :***

(U_n) n'est pas une suite géométrique. $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \neq U_n \times Q$ où Q est un réel fixé constant, $Q \neq 0$ et $Q \neq 1$.

Il suffit de prendre un contre−exemple pour montrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ n'est pas égal à une constante.

Ex : $U_1 = 2$

$U_2 = 20$

$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{20}{2} = 10$

$U_3 = 202$

$\Rightarrow \frac{U_3}{U_2} = \frac{202}{20} = 10{,}1$

Donc $\frac{U_3}{U_2} \neq \frac{U_2}{U_1}$

Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} \neq$ constante.

- ***Propriété 6 :***

$\lim U_n = +\infty$, i.e (U_n) diverge.

La démonstration est évidente. A chaque rang, on ajoute au moins un chiffre au nombre de départ, donc plus le rang n devient grand, plus le nombre a de chiffres donc plus le nombre grandit et tend vers l'infini.
Donc (U_n) diverge.

Grâce à ces quelques propriétés, nous avions déjà quelques bases sur notre suite. J'ai également réalisé quelques graphiques qui ont montré que, le choix du α que l'on choisit au départ (U_1) influe sur la courbe, que les courbes/suites ($U_{\alpha(n)}$) ne sont pas proportionnelles entre elles.

Mais ce que nous cherchions à faire était prouver que toutes les séquences de nombre apparaissaient au moins une fois, quelque soit le nombre α choisi au départ. Nous avons donc décidé de programmer par informatique notre suite, afin de pouvoir avoir un aperçu des plus grands nombres à un rang n plus grand (car à la main les calculs sont assez longs, sachant que U_{100000} comporte <u>au moins</u> 100000 chiffres !). Nous nous sommes donc lancés ensemble dans une réflexion sur le programme, qui s'est avéré nous poser des problèmes, principalement à cause de la limite du nombre de chiffres, qui, si mes souvenirs sont exacts, est de 2^{37} , et à cause du nombre de chiffres du reste (car de n=1 à 10, on ajoute 1 chiffre, de n=11 à 100 on ajoute soit 1 soit 2 chiffres, de n=101 à 999 on ajoute soit 1, soit 2, soit 3 chiffres, etc...) qui décale les cases du tableau (qui contient le nombre) et fausse l'indice du U_n suivant.

Face aux difficultés rencontrées, nous avons quelque peu laissé cette suite en suspens pour nous attaquer à des suites semblables, mais plus faciles à programmer par exemple. Nous avons défini ainsi deux nouvelles suites de travail, sur lesquelles j'ai travaillé :

– La suite que l'on notera suite (+) :

$$V_n = U_n \text{ modulo } (n+1)$$

$$U_{n+1} = U_n + V_n$$

– La suite que l'on notera suite (x) :

$$V_n = U_n \text{ modulo } (n+1)$$

$$U_{n+1} = U_n \text{ x } V_n$$

Pour celles-ci, c'est la suite des restes que l'on a étudiée, (V_n).

L'étude de la deuxième suite, la suite (x), a été très rapide. En effet, si le premier terme est pair, de par l'indice n=2, la suite s'annule et devient constante, égale à 0. Si le premier terme est impair, rapidement on retrouvera forcément un nombre pair qui s'annulera et qui donnera une suite constante égale à 0 à partir d'un certain rang.

Pour ce qui est de la suite (+), je l'ai programmée grâce à mes quelques connaissances en informatique, acquises en première année de licence Informatique et Mathématiques. Je n'ai pas été confrontée aux problèmes que nous posait notre première suite de travail, car comme on ajoute le reste au nombre précédent, la suite croît beaucoup moins rapidement.

<u>Programme réalisé :</u>

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
```

```
#include <time.h>

int test_compt(int a, int j)
{
   if (a>9 && a<100)
   {
      j = j+2;
      return j;
   }
   else if (a>99 && a<100)
   {
      j = j+3;
      return j;
   }
   else
   {
      j = j+1;
      return j;
   }
}

void affich_freq(int t[])
{
   int i,z=0,u=0,d=0,o=0,q=0,c=0,s=0,v=0,h=0,n=0, somme;
   for (i=0 ; i<9000; i++)
   {
      if (t[i]==0)
      {
         z = z+1;
      }
      else if (t[i]==1)
      {
         u = u+1;
      }
```

```
      else if (t[i]==2)
      {
         d = d+1;
      }
      else if (t[i]==3)
      {
         o = o+1;
      }
      else if (t[i]==4)
      {
         q = q+1;
      }
      else if (t[i]==5)
      {
         c = c+1;
      }
      else if (t[i]==6)
      {
         s = s+1;
      }
      else if (t[i]==7)
      {
         v = v+1;
      }
      else if (t[i]==8)
      {
         h = h+1;
      }
      else
      {
         n = n+1;
      }
   }
    printf("Apparition du chiffre : \n Zero : %d \n Un : %d \n Deux : %d \n Trois : %d \n Quatre : %d \n Cinq : %d \n Six : %d \n Sept : %d \n Huit : %d \n Neuf : %d",
```

```
z,u,d,o,q,c,s,v,h,n);
   return;
   somme = z+u+o+q+c+s+v+h+n;
   printf("\n %d \n", somme);
}



int main()
{
   int tab[10000], nbr, i, j = 0, r, k, m, c, d, n;
   printf("Entrez nombre \n");
   scanf("%d", &nbr);
   i = 2;
   while (j<9000)
   {
      r = nbr%i;
      if (r>9 && r<100)
      {
         n = r%10;
         d = r/10;
         tab[j] = d;
         tab[j+1] = n;
      }
      else if (r>99 && r<1000)
      {
         c = r/100;
         d = (r%100)/10;
         n = (r%100)%10;
         tab[j] = c;
         tab[j+1] = d;
         tab[j+2] = n;
      }
      else if (r>999 && r<10000)
      {
```

```
            m = r/1000;
            c = (r%1000)/100;
            d = ((r%1000)%100)/10;
            n = ((r%1000)%100)%10;
        }
        else
        {
            tab[j] = r;
        }
        j = test_compt(r, j);
        nbr = nbr + r;
        i = i+1;
    }
    /*for (k=0; k<=9000; k++)
    {
        printf ("%d   ", tab[k]);
    }
    */

    affich_freq(tab);
    printf(" \n %d ", nbr);
    return 0;
}
```

Grâce à ceci, nous avons pu faire quelques observations intéressantes sur la suite des restes, observations pour la plupart non démontrées.

- ***Observation 1 :***

  A partir d'un certain rang, la suite devient « périodique » (d'après notre définition de la périodicité donnée dans le cahier rendu, c'est à dire qu'elle garde un même motif à partir d'un certain rang.) Ainsi, la période est soit d'un chiffre (pour 1, 2, 27, 28, etc), soit de deux (pour 3, 4, 5, 6, etc).

  Démonstration : Cela peut se démontrer par le fait que plus le nombre grandit, moins le modulo n'est influent sur celui-ci. Ainsi, si le modulo n'influe plus (ou presque plus), le reste de la division devient constant, ou oscille tout au plus entre deux valeurs.

- ***Observation 2 :***

Les chiffres fonctionnent par paire, ils reproduisent le même schéma.

Exemple : La somme des V_n est la même pour 1 et 2 . Elle est en fait la même pour un nombre impair et le nombre pair qui suit.

Démonstration : Si n est pair ,

Si $U_1 = n$ (c'est à dire U_1 pair)

$U_2 = n - 1 + 1$

$= n$

Si $U_1 = n - 1$ (c'est à dire U_1 impair)

$U_2 = n + 0$

$= n$

- ***Observation 3 :***

Dans la plupart des suites symboliques, nous avons pu constater que certains chiffres n'apparaissaient pas du tout, alors que dans les autres, tous apparaissaient au moins une fois.

- ***Observation 4 :***

Les sommes des restes sont proportionnelles entre elles en fonction du premier terme U_1 choisi.

Par exemple, en prenant la limite du rang égale à 10000, si on prend $U_1=3$ (ou 4), $\sum V_{n3} = 10003$; si on prend $U_1=6$, $\sum V_{n6} = 20006 = 2 \times \sum V_{n3}$; si on prend $U_1 = 13$, $\sum V_{n13} = 30009 = 3 \times \sum V_{n1}$; si on prend $U_1 = 25$, $\sum V_{n25} = 40012 = 4 \times \sum V_{n1}$, etc.

Mais finalement, ces deux suites nous ont peu intéressés car nous les trouvions trop prévisibles et nous ne voulions pas abandonner notre première idée de suite, car la situation se débloquait, avec un programme informatique que nous avions enfin. Ainsi, certaines démonstrations des observations que nous avions pu faire sont restées inachevées.

Je me suis penchée ensuite sur la longueur du nombre, qui nous semblait intéressante. J'ai donc fait des recherches sur Internet afin d'avoir quelques idées de comment et par où commencer et de voir quelques exemples de mathématiciens qui auraient pu, eux aussi travailler sur ce vaste sujet. J'ai trouvé la suite de Conway : chaque terme de la suite se construit en annonçant le terme précédent, c'est-à-dire en indiquant combien de fois chacun de ses chiffres se répète .

Par exemple, si $U_x = 11221$, U_{x+1} sera égal à 212211.

Ainsi, j'ai donc, comme lui, défini une suite (L_n) qui correspond à la longueur du nombre au rang n, et essayé de calculer $\lim\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)$.

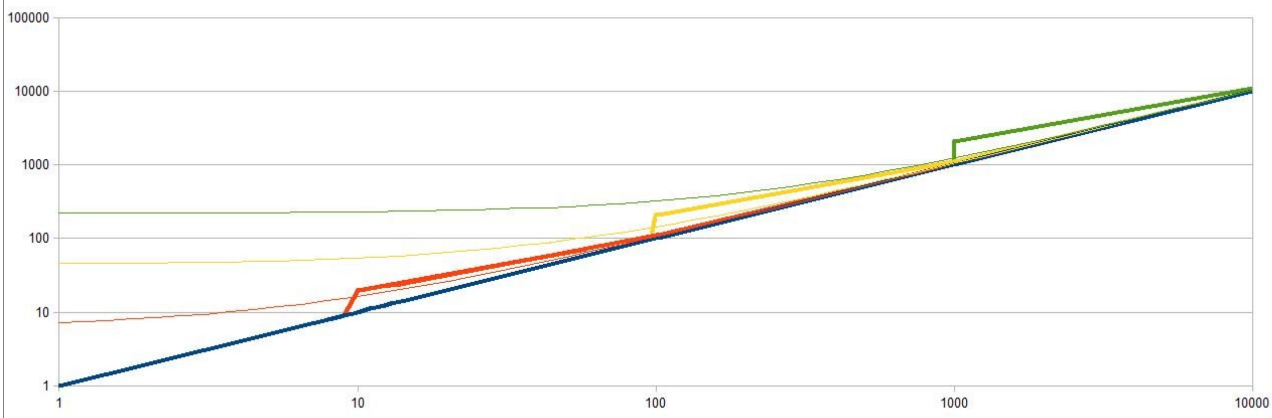
Bien que Monsieur Conway ait trouvé une limite constante, unique racine d'un polynôme extraordinaire, pour nous cette L_n peut prendre différentes valeurs : limite n'a absolument rien donné... ! En effet, dans notre suite, quand n devient grand,

- Si n est compris entre 1 et 10, on ajoute un chiffre (et donc on a $L_n = n.$) ;
- Si n est compris entre 11 et 99, on ajoute soit un, soit deux chiffres ;
- Si n est compris entre 100 et 999, on ajoute soit un, soit deux, soit trois chiffres ;
- etc.

Ainsi, excepté si on prend toujours le cas où notre nombre n'augmente que d'un chiffre, c'est à dire le minimum de la fonction ($U_{n+1} = 10U_n$), et $\lim\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right) = 1$, on ne pourra pas calculer de limite pour cette suite alternative.

J'ai réalisé le graphique de cette suite afin d'avoir un aperçu sur papier, mais, bien que juste, le graphe n'est pas aussi clair que je l'aurais souhaité. J'ai en effet été forcée d'utiliser une échelle logarithmique, car les valeurs étaient trop grandes. J'ai essayé également d'appliquer la fonction logarithme néperien sur toutes les valeurs (pour l'axe X et Y) (afin de les avoir beaucoup plus petites mais sans changer l'allure du graphe !), mais cela n'a pas marché, même dans le cas où les valeurs en x et en y étaient identiques et auraient du donner la droite x=y. Je ne peux expliquer pourquoi, l'échelle logarithmique est ainsi la seule alternative au problème que j'ai rencontré.

Graphe réalisé :



Représentation de la longueur du nombre (y) en fonction du rang n (x) à l'échelle logarithmique

Ainsi, ce sont sur des propriétés de la longueur du nombre que s'est achevée notre étude de la suite.

Nous aurions aimé répondre à quelques questions supplémentaires, comme la question du nombre univers, qui a porté notre travail tout au long du semestre, comme également un travail sur les possibilités de longueur au rang n que nous n'avons pas pu commencer, etc. Mais notre suite est en fait vraiment très vaste et de tout petits problèmes ont engendré des recherches énormes (inattendues !). En quatre mois, nous n'avons certainement pas pu en étudier plus d'un dixième.

Bilan de l'Unité d'Enseignement MathEnJeans

Durant ces quatre derniers mois, nous avons travaillé d'une manière complètement différente par rapport à celles que nous connaissons. Nous devions choisir un thème parmi plusieurs et l'étudier sous toutes les coutures, sans piste particulière donnée au début. Le plus difficile était surtout de trouver les bonnes questions à se poser, pour pouvoir y répondre ensuite. Pour ma part, ce mode de travail était complètement nouveau. La recherche mathématique était quelque chose qui ne m'attirait absolument pas, car je ne pensais pas supporter le fait de chercher uniquement pour chercher, avec l'idée qu'il était possible de ne jamais rien trouver. En revanche, le fait de travailler en groupe, dans une ambiance certes de travail, mais conviviale, a fait de cette approche de la recherche quelque chose d'assez agréable !

Ce qui était particulièrement appréciable dans cette unité d'enseignement était l'atmosphère détendue qui y régnait. Nous n'avions d'abord aucune pression, ou d'heures de révision stressantes avant devoirs, partiels, et examens. Nous devions seulement travailler de notre côté, essayer des techniques, des méthodes différentes sans pour autant devoir donner un résultat exact dans l'immédiat, et écouter les conseils que l'on pouvait nous donner. J'ai également appris des nouvelles choses, comme par exemple écrire en langage mathématique sur un traitement de texte informatique, ce qui est un peu long mais très satisfaisant à la vue du résultat !

Ensuite, j'ai beaucoup apprécié la diversité des cours auxquels nous assistions. Nous n'avions pas de notes à prendre, nous venions écouter un cours pour la culture générale, et pour ce que cela nous apportait, pas dans le but d'avoir une bonne note à un examen. J'en viens ainsi à la grande diversité des activités qui nous étaient proposées : conférences, expositions, week-end à Gap (auquel je regrette de ne pas avoir pu participer), etc.

Enfin, contre toute attente (car c'est uniquement ma curiosité qui m'avait poussée en MathEnJeans !), j'ai apprécié ce mode de travail qu'est la recherche mathématique : explorer une multitude de pistes, faire des recherches, puiser dans toutes nos connaissances, comparer, expliquer nos questions aux gens qui nous entourent, curieux de connaître leur avis, ou encore se retrouver face à des impasses ou des problèmes qui paraissent insurmontables et qui, quand on les surmonte enfin, nous apportent une énorme satisfaction. La recherche en mathématique (et certainement la recherche en général) n'est pas aussi frustrante que ce que j'avais pu l'imaginer. Je suis contente d'avoir pu l'approcher d'une manière moins scolaire que ce que nous connaissions, qui nous faisaient souvent nous braquer à cause du travail demandé ou des notes qui pouvaient nous pénaliser.

En revanche, je regrette que nous n'ayons pas été plus aiguillés dans nos recherches, mais cela peut se comprendre en observant les effectifs de la classe. C'était un travail vraiment nouveau, auquel nous ne connaissions que très peu de choses, et nous aurions voulu être un peu plus guidés et conseillés, pour ne pas nous retrouver dans des impasses impossibles, lâchés dans un milieu totalement inconnu.

Bien que cela « dédramatisait » le travail demandé, j'aurais préféré que les thèmes présentés lors de la première séance soit un peu plus mathématiques, moins considérés comme des jeux, afin d'avoir l'impression de faire quelque chose d'un peu plus sérieux.

J'aurais également aimé avoir plus de temps pour une recherche aussi vaste. Peut-être qu'une unité d'enseignement sur deux semestres serait plus appropriée. Mais ceci n'engage que moi !

En conclusion, je peux dire que je suis d'une manière générale plutôt satisfaite du déroulement de cette unité d'enseignement. J'ai acquis une nouvelle façon de travailler et ainsi qu'une véritable culture générale scientifique.

Résolution d'un problème mathématique

Matt Usalem est un grand-père de plus de 80 ans (mais de moins de 150 ans). Aujourd'hui, il peut dire à ses deux petits enfants, qui ont des âges différents :

« Le produit de nos trois âges est égal à la somme des carrés de nos âges ».

Quel est l'âge de Matt Usalem ?

SOLUTION :

Soit x l'âge de Matt Usalem, $x \in [80\ ;150]$

Soient y et z les deux âges respectifs des deux petits enfants.

On sait que $x^2+y^2+z^2 = xyz$

On suppose que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$
et on fixe $x \sim y \sim z$.

On résout l'équation du second degré en x associée. Soit D le discriminant.

$D = y^2z^2-4(y^2+z^2)$

Or D est un carré.

Et $x = \dfrac{yz+\sqrt{D}}{2}$

ou $x = \dfrac{yz-\sqrt{D}}{2}$

On obtient énormément de solutions.

Soit (α, β, γ) une solution particulière de l'équation $x^2+y^2+z^2=xyz$.

On a $X^2 - yzX + (y^2 + z^2) = 0$

$\Rightarrow X_1 = x$
et $X_2 = yz - X_1 = yz - x$

Donc (x , y , z) solution $\Rightarrow$ (y , z , yz - x)

On obtient une nouvelle liste de triplets solutions : (3 , 3, 3) ; (3 , 3 , 6) ; (3 , 6 ,15) ; (3 , 15 , 39) ; (6 , 15 , 87) ; (15 , 87 , 1299) ; etc, mais on ne peut en retenir qu'un seul car on sait que x doit être supérieur à 80 et inférieur à 150.

La solution de l'équation est donc (6 , 15 , 87).

Matt Usalem a 87 ans.