MATHS EN JEANS 1

THÈME : Coloriage des cartes

Sami AIT ABBI NAZI (L2 BIO)
Julien GRENIER (L2 BIO)

Faculté des Sciences
Aix Marseille Université

21 JANVIER 2013 :

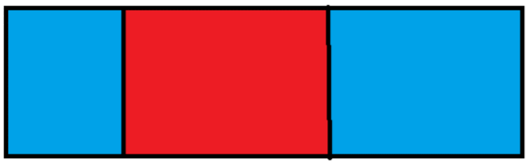
Présentation des différents thèmes
Choix du thème : Coloriage des cartes

28 JANVIER 2013 :

Problématique : On cherche à déterminer le nombre de couleurs minimum nécessaire pour pouvoir colorier des cartes géographiques.
On impose des conditions pour les cartes :
- On considère les océans comme un pays donc ils vont utiliser une couleur.
- 2 pays ayant une frontière commune doivent avoir 2 couleurs différentes.

4 FÉVRIER 2013 :

Conjecture n°1 : On peut utiliser une seule couleur.
Contre-exemple :
Dans ce cas-là, on 3 pays. Pour les colorier, on a besoin donc de 2 couleurs étant donné que 2 pays ont une frontière en commune. Ces pays ne peuvent être colorés de la même couleur.



Conjecture n°2 : On peut utiliser une couleur par pays.
Contre-exemple : *Amérique du Nord.*

Ici, on a affaire à 3 pays. On peut utiliser que 2 couleurs pour pouvoir colorier le Canada, les États-Unis et le Mexique. Étant donné que le Canda et les États-Unis ont une frontière en commune, ces 2 pays doivent avoir 2 couleurs différentes. Il en est de même pour les États-Unis et le Mexique. Cependant, le Canada et le Mexique n'ont pas de frontière commune, donc on peut utiliser la même couleur pour ces 2 pays.

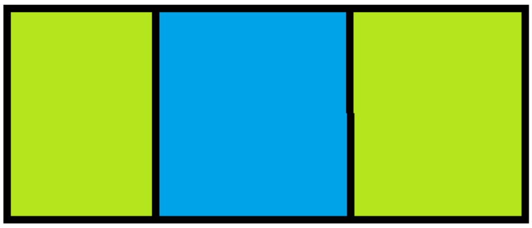
On cherche à imposer certaines conditions de nos cartes afin de trouver un moyen de déterminer le nombre minimal de couleur nécessaire afin de colorier ces cartes. Ces conditions sont :

- Frontières d'un seul tenant
- Pas d'enclave
- Pas de territoire d'outre-mer
- On ne considère que des points triples, c'est-à-dire qu'un point ne peut être entouré qu'au maximum par 3 pays.

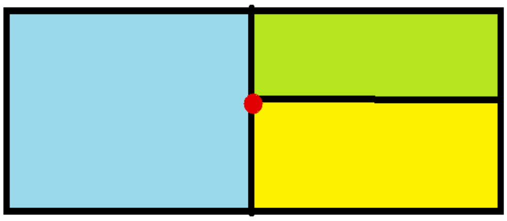
On cherche à faire des exemples de cartes avec 3, 4 et plus de pays. Pour cela, on raisonne sur le nombre de points triples que la carte comporte.

Disposition avec 3 pays :

On commence par les cartes ne comportant que 3 pays. Dans ce cas, on peut avoir au maximum qu'un seul point triple.
Un point triple est représenté par un cercle rouge.

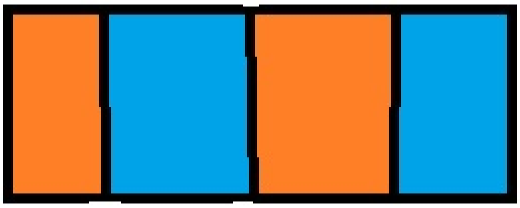


0 point triple ⇒ 2 couleurs

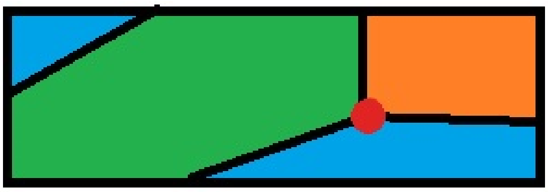


1 point triple ⇒ 3 couleurs

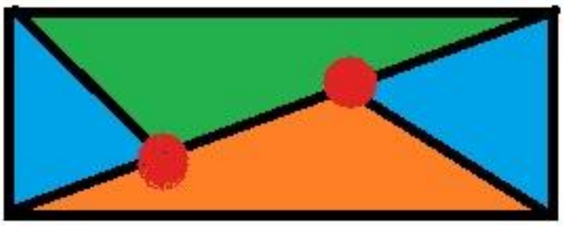
Disposition avec 4 pays :



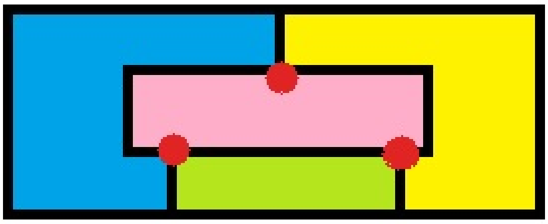
0 point triple ⇒ 2 couleurs



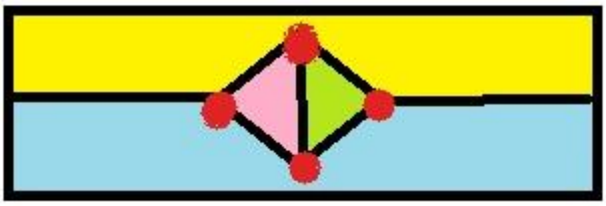
1 point triple ⇒ 3 couleurs



2 points triples ⇒ 3 couleurs



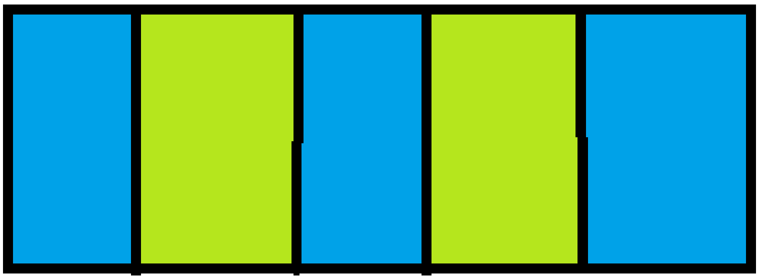
3 points triples ⇒ 4 couleurs



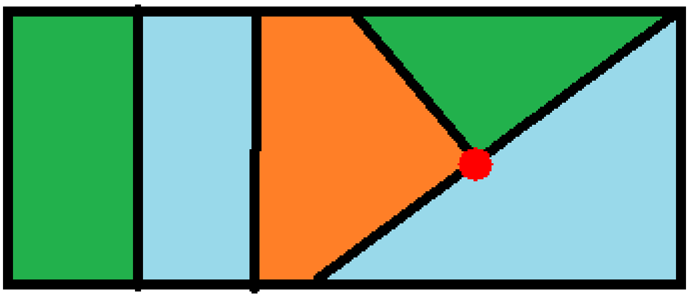
4 points triples ⇒ 4 couleurs

Avec 4 pays, on peut au maximum réaliser 4 points triples.

Disposition avec 5 pays :



0 point triple ⇒ 2 couleurs

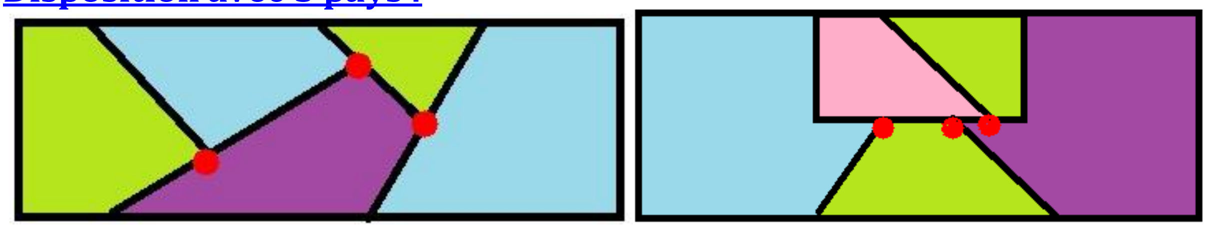


1 point triple ⇒ 3 couleurs

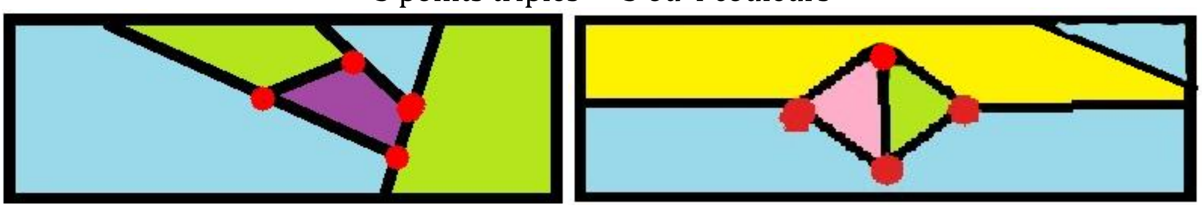
11 FÉVRIER 2013 :

On réaliste la suite de ceux qu'on avait commencé le 4 février, c'est-à-dire qu'on cherche le nombre minimum de couleurs nécessaires qu'on fixe le nombre de pays et qu'on fait varier le nombre de points triples présents sur la carte.

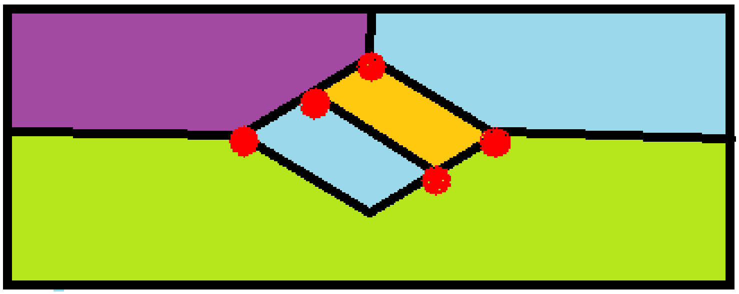
Disposition avec 5 pays :



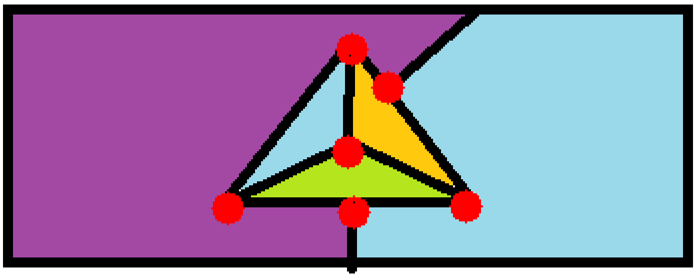
3 points triples ⇒ 3 ou 4 couleurs



4 points triples ⇒ 3 ou 4 couleurs

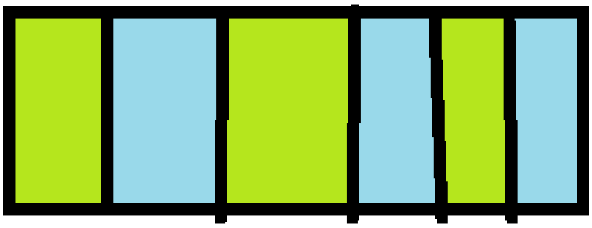


5 points triples ⇒ 4 couleurs

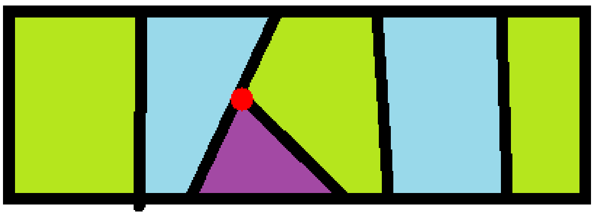


6 points triples ⇒ 4 couleurs

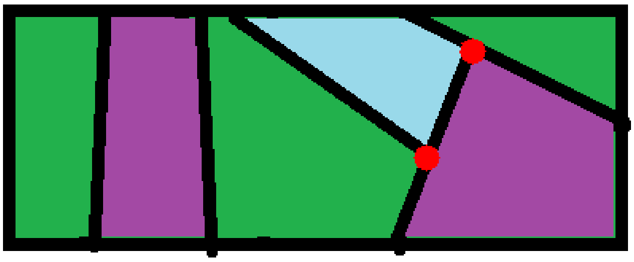
Disposition avec 6 pays :



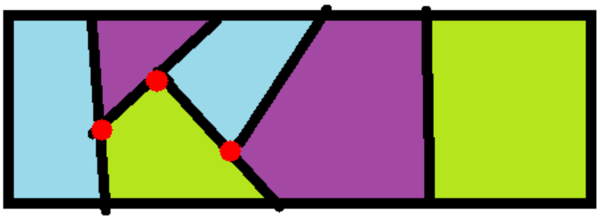
0 point triple ⇒ 2 couleurs

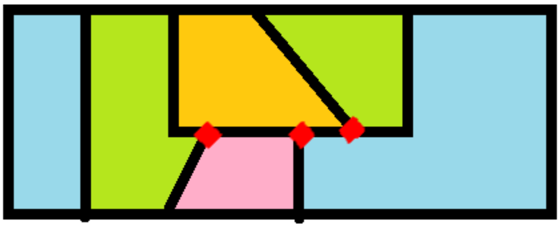


1 point triple ⇒ 3 couleurs

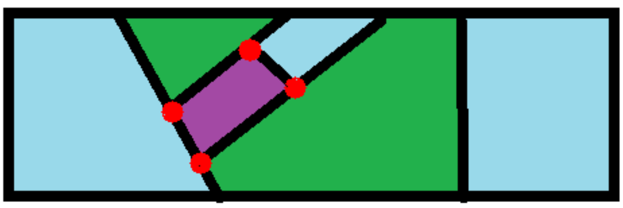


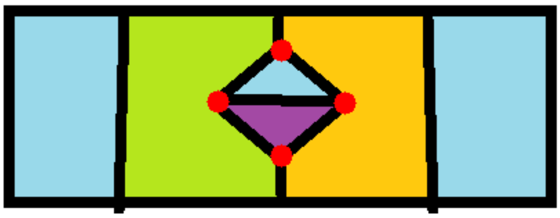
2 points triples ⇒ 3 couleurs



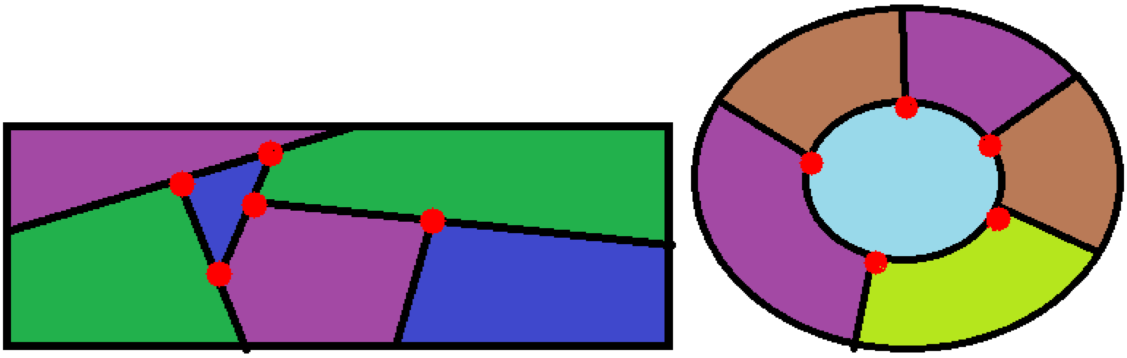


3 points triples ⇒ 3 ou 4 couleurs

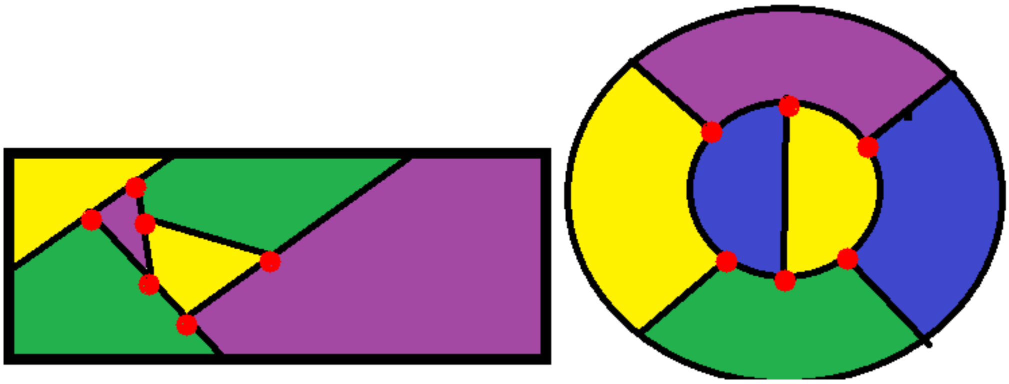




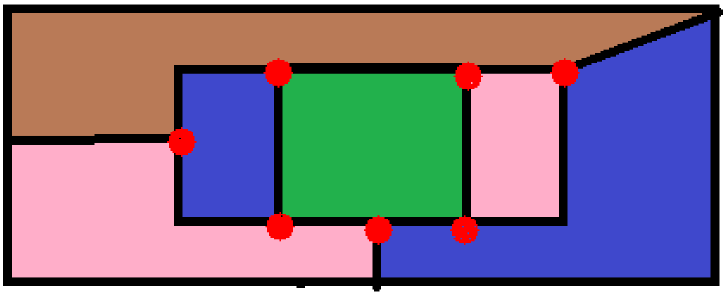
4 points triples ⇒ 3 ou 4 couleurs



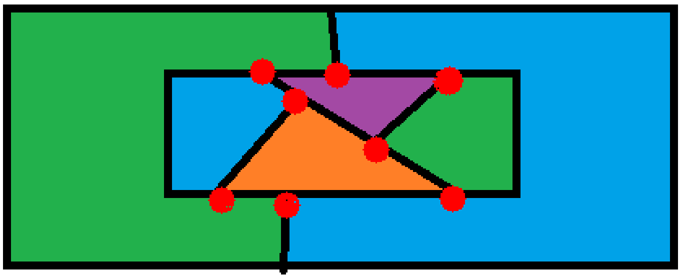
5 points triples ⇒ 3 ou 4 couleurs



6 points triples ⇒ 3 ou 4 couleurs



7 points triples ⇒ 4 couleurs

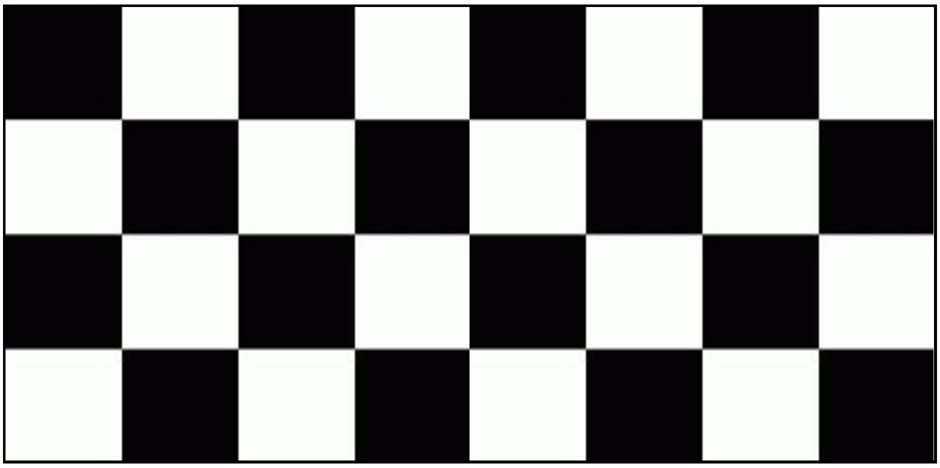


8 points triples ⇒ 4 couleurs

Hypothèse : Selon nos observations, à partir d'un modèle qui respectent nos conditions (c'est-à-dire un modèle ne contenant qu'au maximum des points triples), 4 couleurs permettraient de compléter tous les modèles de cartes selon nos conditions.

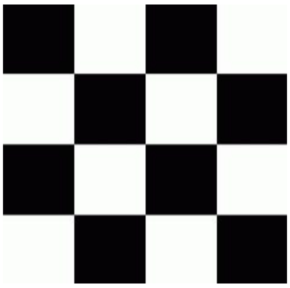
18 FÉVRIER 2013 :

Objectif : Trouver une relation entre le nombre de couleurs et le nombre de points triples
Hypothèse : S'il n'y a pas de point triples, alors 2 couleurs suffisent pour colorier une carte.
Exemple du damier : Dans le cas d'un damier carré, on peut le répéter à l'infini. 2 couleurs suffisent pour colorier ce damier



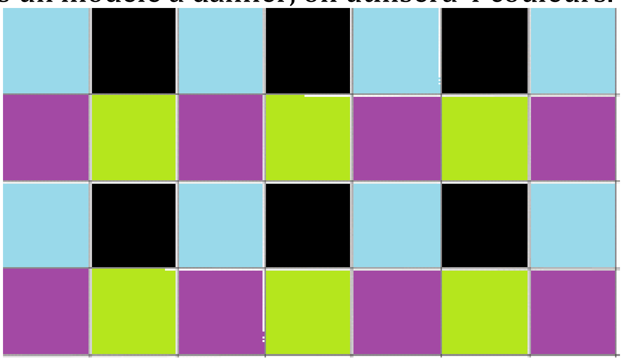
Influence des points quadruples :

Selon les conditions que l'on impose à la carte, le nombre de couleurs minium pour à utiliser pour colorier la carte sera différent.
Si on considère 2 pays ayant un point en commun, on suppose que ce point ne permet pas de définir une frontière commune entre ces 2 pays. Pour un modèle à damier (modèle 1), on utilisera 2 couleurs.



Modèle 1

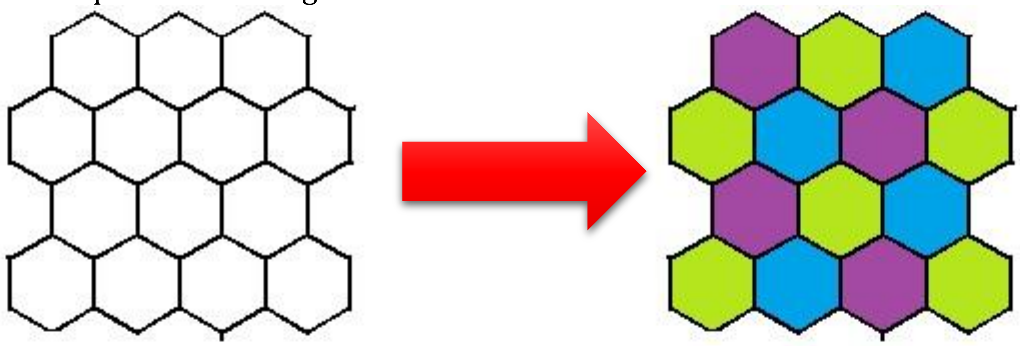
Si on considère que 2 pays ayant un point en commun ont donc une frontière en commune (modèle 2), alors dans un modèle à damier, on utilisera 4 couleurs.



Modèle 2

Modèle du damier hexagonal (« carrelage provençal »):

On cherche à déterminer le nombre de couleur nécessaire pour colorier un damier composé uniquement d'hexagones.

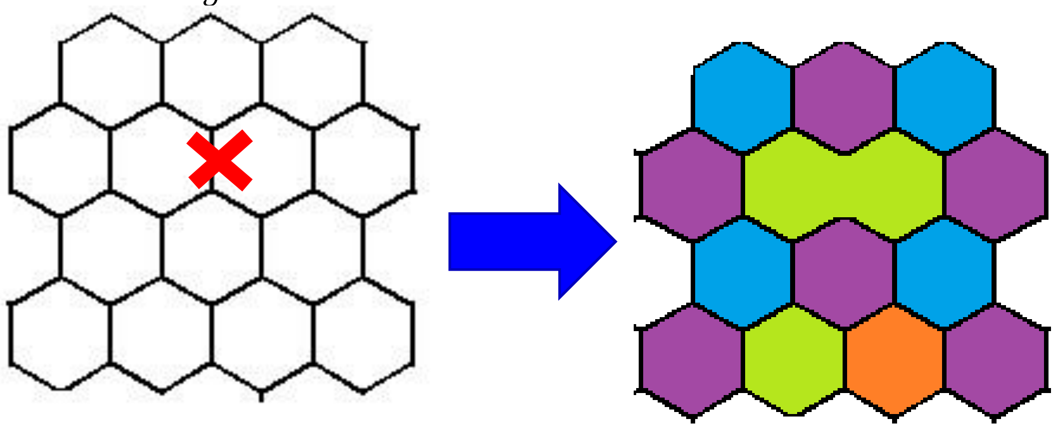


On doit utiliser 3 couleurs pour colorier ce motif à damier.

4 MARS 2013 :

On veut savoir l'influence sur le nombre de couleurs si on supprime une frontière.
Pour cela, on choisit une carte que laquelle on décide de supprimer une frontière de manière aléatoire. On souhaite savoir si cela change le nombre de couleurs nécessaires.
Dans un second temps, on remet en place la frontière supprimée. On étudie alors le nombre de couleurs nécessaires dans ce cas-là.

Exemple sur le damier hexagonal : *Quelle sera la conséquence de la suppression d'un segment d'un des hexagones ?*



Dans ce cas précis, la suppression d'une des arêtes d'un des hexagones de ce modèle provoque l'utilisation d'une 4ème couleur.

Hypothèse : On a n pays avec x frontières. Si on a x-1 frontières pour n couleurs, on peut colorier avec n-1 couleurs. Si on repasse à x frontières, on peut rester à n-1 couleurs jusqu'à un minimum donné par le point commun entre les pays. Ceci est vrai pour un modèle en damier. »
Il s'agit d'une hypothèse totalement fausse.

11 MARS 2013 :

On a effectué des recherches sur internet afin de pouvoir avancer sur notre thème.
Il existe une corrélation entre les cartes géographiques et les graphes planaires.

Proposition 1 : 6 couleurs suffisent pour colorier une carte quelconque.

Proposition 2 : Si dans toute carte, il existe au moins 1 pays avec n pays voisins maximum, alors n+1 suffiraient.

On considère une carte comme un graphe planaire donc n pays = n +1 frontières (faux)

$$\Sigma \deg n\ pays = 2n\ frontières$$

18 MARS 2013 :

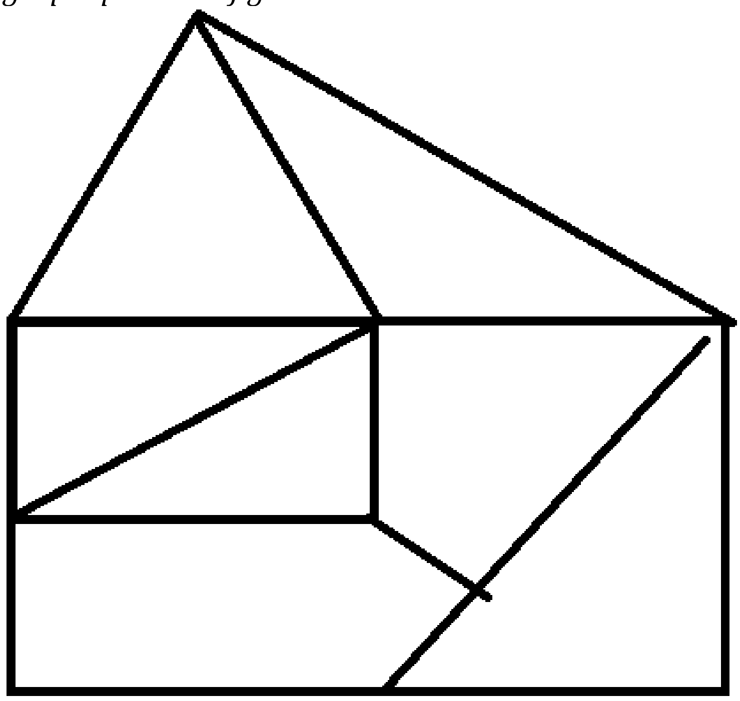
Passage d'une carte à un graphe planaire :

Un graphe est dit « planaire » quand il peut être tracé sur un plan sans que ses arêtes ne se croisent.
La carte est uniquement considérée sur un plan.
Un pays est une région d'un seul morceau.
Une frontière est une longueur finie non nulle. C'est une ligne continue, ce qui exclu les points frontières.

Carte	Graphe
1 pays	1 face
1 frontière	1 arête

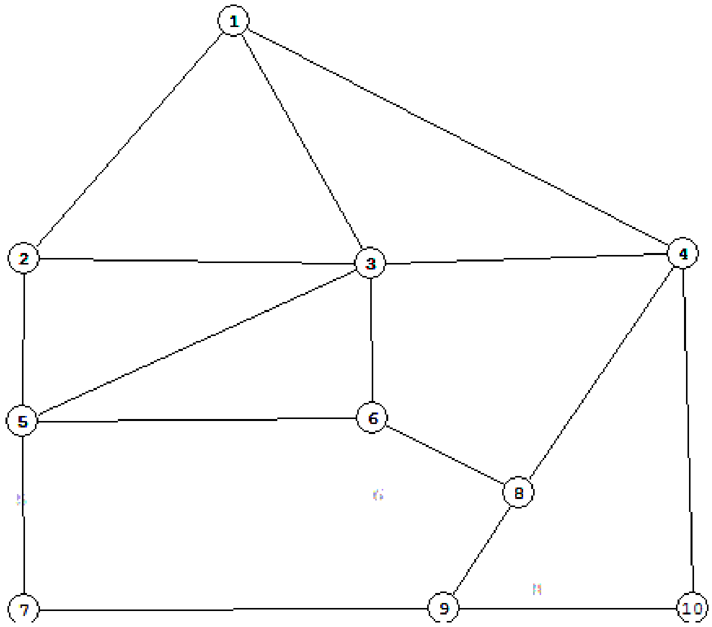
Exemple d'un passage d'une carte à un graphe

Soit une carte géographique sur la figure ci-dessous :



Carte 1

Le graphe qui correspondrait aura la forme :



Graphe 1

La carte dessinée est un graphe planaire car on peut la dessiner sans aucune arête qui se croise.

On a affaire ici a à un graphe connexe. 2 sommets quelconques sont reliés par une suite d'arêtes consécutives.

Formule d'Euler :

Soit un graphe avec s sommets, a arêtes et f faces : $\boxed{s - a + f = 2}$

Exemple : *Le graphe ci-dessus (graphe 1) qui possède 10 sommets, 16 arêtes et 8 faces.*
Donc $s - a + f = 10 - 16 + 8 = 2 \Rightarrow$ *La formule s'applique bien.*

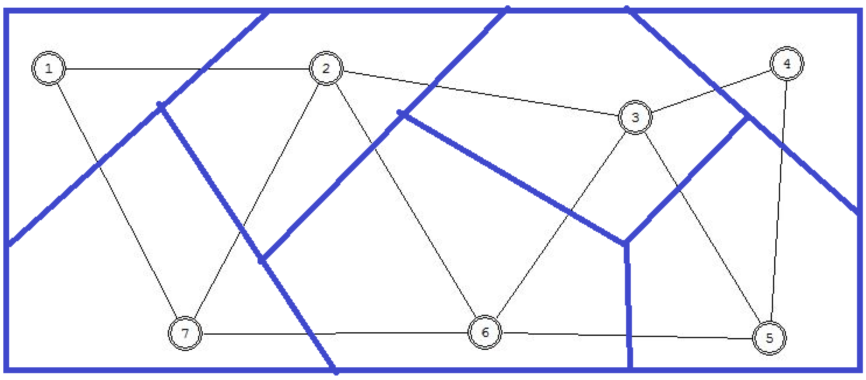
25 MARS 2013 :

Passage d'une carte géographique à un graphe planaire :

Par rapport aux définitons posés le 18 mars, on a corrigé 2 choses :

- Chaque pays dans une carte est représenté par un sommet sur un graphe.
- Chaque frontière entre 2 pays dans une carte est représentée par 1 arête entre les 2 sommets correspondants à ces pays.

Exemple :



Superposition entre la carte géographique (en bleu) et le graphe (en noir)

Le graphe obtenu sur la figure précédente suit-il la formule d'Euler ?
Ce graphe a donc 7 sommets, 11 arêtes et 6 faces.
$s - a + f = 7 - 11 + 6 = 2 \Rightarrow$ Ce graphe suit bien la formule d'Euler.

Début de la démonstration de la formule d'Euler :
On fait une démonstration au niveau du nombre d'arêtes.
Si on a n = 0 arête, alors on a une face et 1 sommet (graphe ci-dessous).

$$\Rightarrow s - a + f = 1 - 0 + 1 = 2$$

La formule est donc vérifiée pour 0 arête.

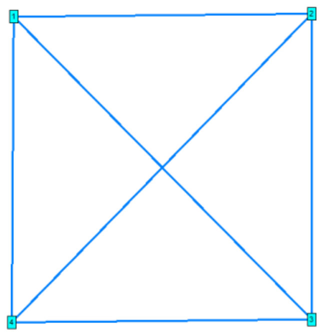
Graphe ayant 0 arête

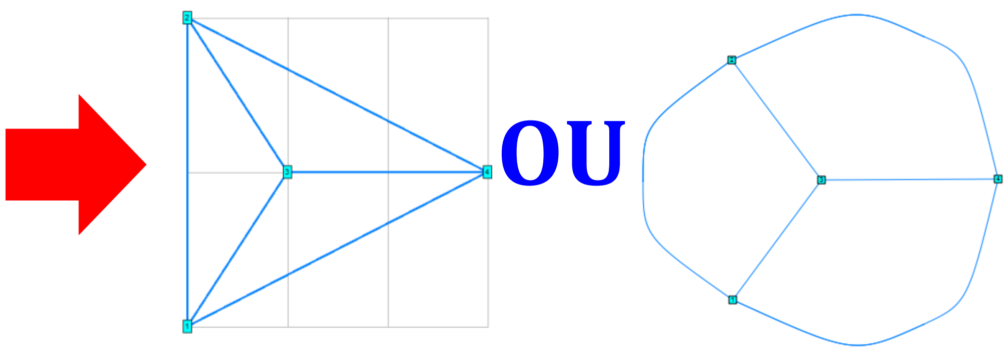
On cherche dans un second temps à démontrer que la formule d'Euler est vraie quand on passe à a+1 arêtes.

8 AVRIL 2013 :

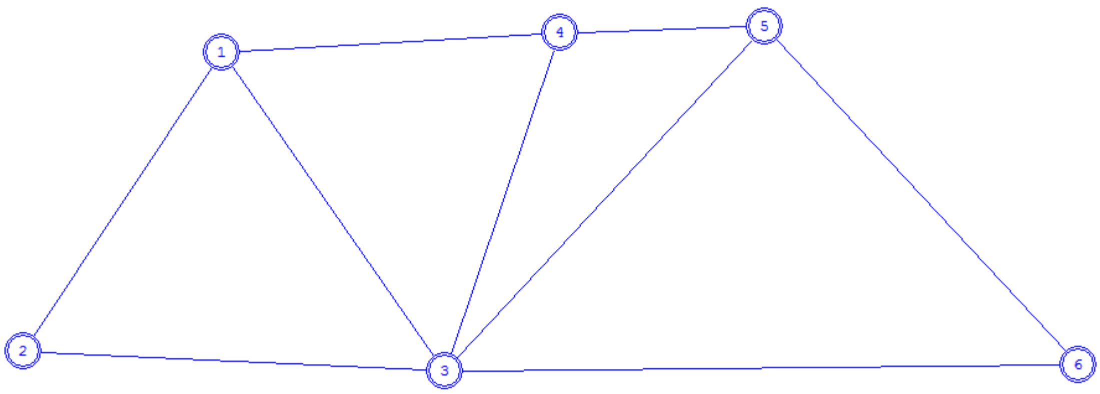
Définition d'un graphe planaire : Il s'agit un graphe qui peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise. S'il existe un seul moyen de dessiner un graphe sans qu'une seule arête ne se croise alors d'il agira s'un graphe planaire.

Exemple 1 : le graphique K4
Ce graphique est nommé ainsi car il possède 4 sommets. Chaque sommet de ce graphe est relié à tous les autres sommets. Il s'agit du graphe complet à 4 sommets. Il s'agit d'un graphe planaire car il existe une manière de le représenter sans que ses arêtes ne se croisent.

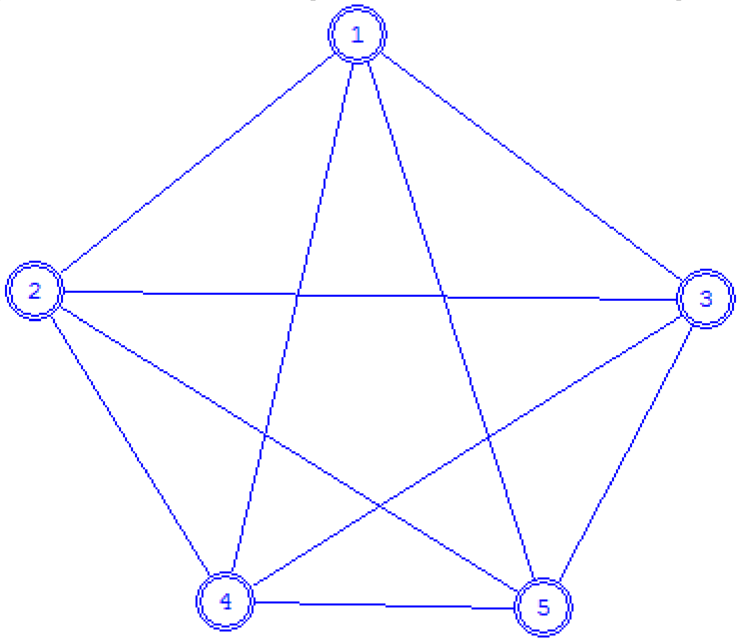




Exemple 2 : *Le graphe ci-dessous est un graphe planaire.*

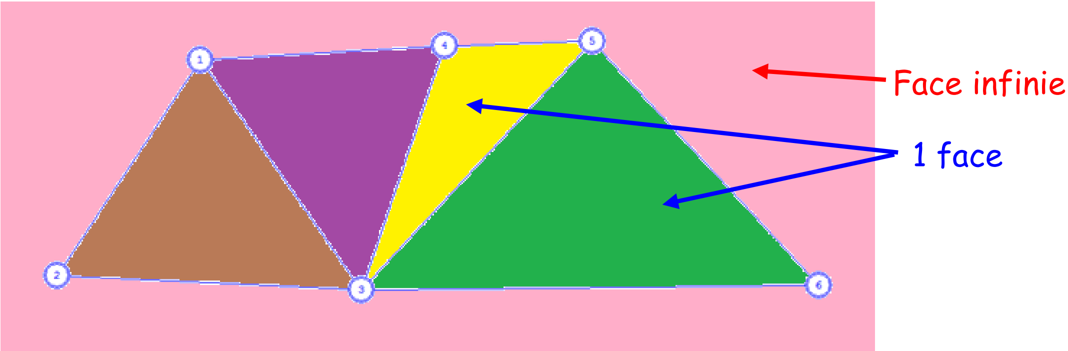


Exemple 3 : *Le graphe K5 (graphique complet à 5 sommets) n'est pas un graphe planaire. Il n'existe pas de façon de le dessiner sans que les arêtes ne se croisent pas.*



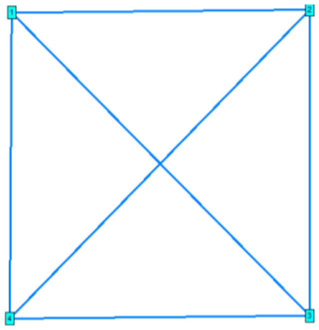
Graphe K5

Une face est un cycle de 3 arêtes minimum ne contenant ni sommet ni arête.
De plus, le contour extérieur d'un graphe et par convention une face infinie ou appelé face extérieure.



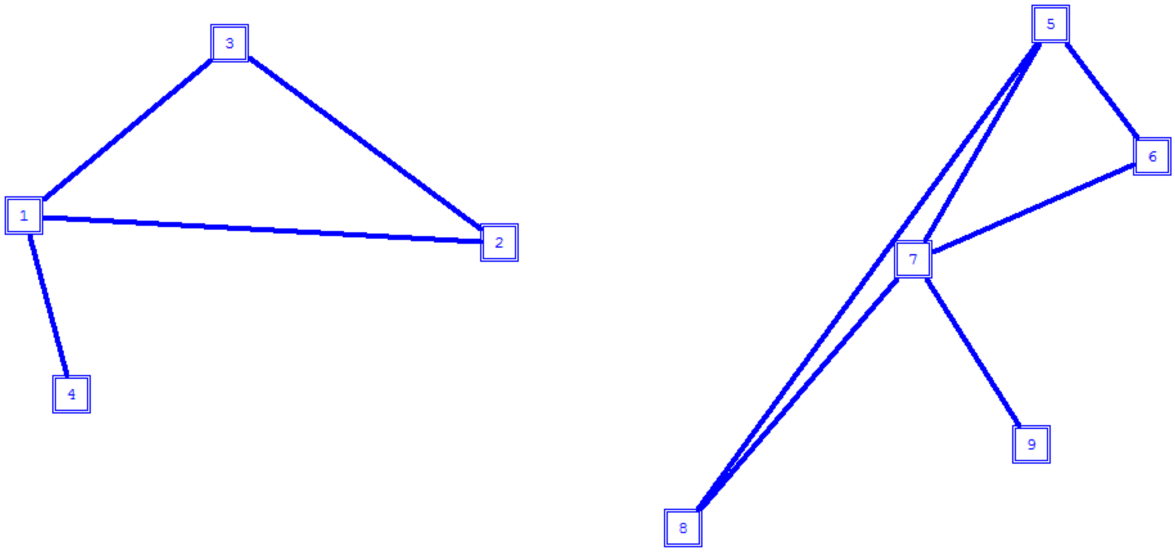
Un graphe est dit **connexe** si 2 sommets quelconque admettent au moins une chaine qui les relie (il n'y a pas de sommet isolé).

Exemple 1 : *Le graphe K4 est un graphe connexe car il existe toujours une chaine pour relier 2 sommets de ce graphe.*



Graphe K4

Exemple 2 : *Le graphe ci-dessous n'est pas un graphe connexe car on ne peut avoir une chaine entre les 2 composantes de ce graphe.*



Graphe non connexe

Formule d'Euler :

Si un graphe planaire connexe possède s sommets, a arêtes et f faces, alors le graphe suit la formule suivante : $\boxed{s - a + f = 2}$

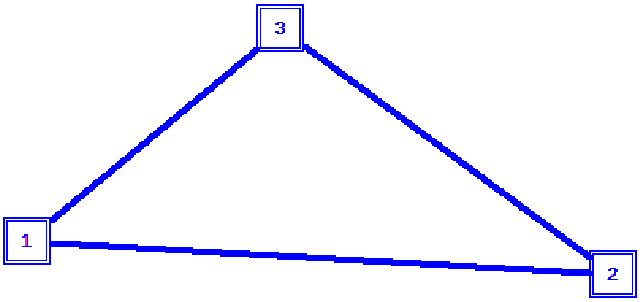
Exemples :

Graphe avec 1 sommet, 0 arête et 1 face

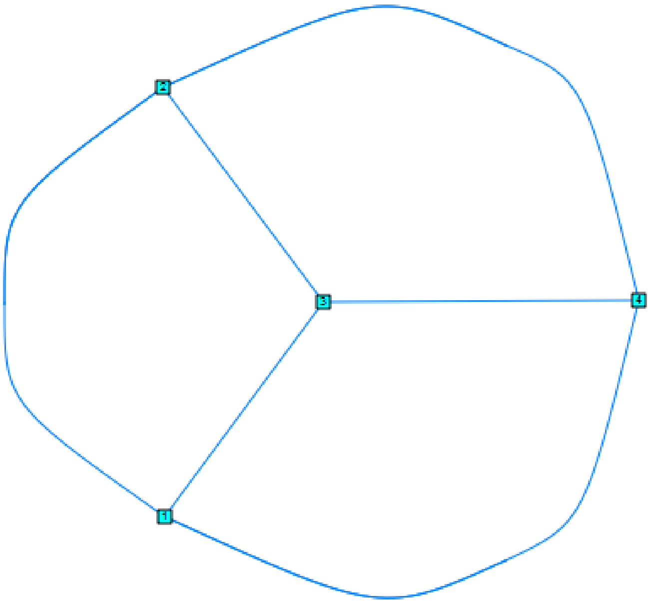
$s - a + f = 1 - 0 + 1 = 2$

Graphe avec 2 sommets, 1 arête et 1 face

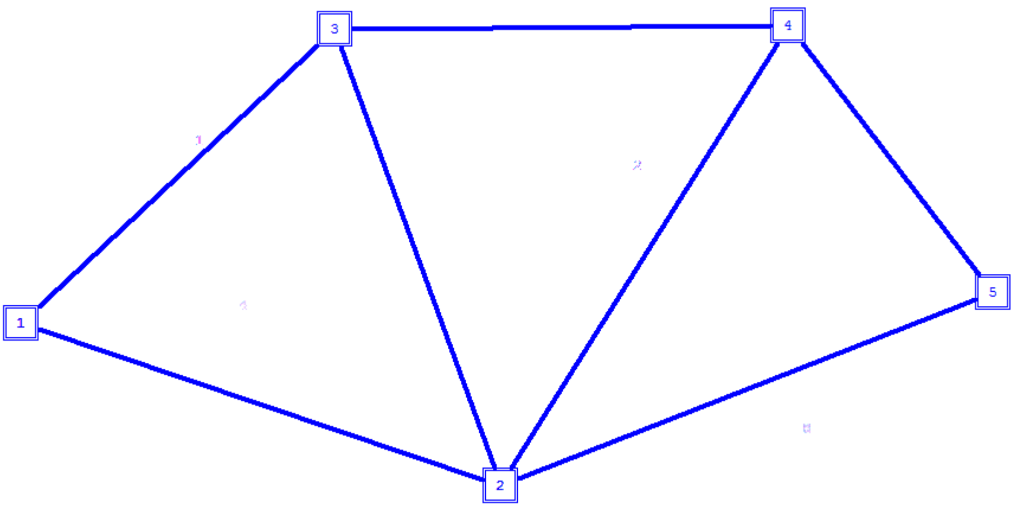
$s - a + f = 2 - 1 + 1 = 2$



Graphe avec 3 sommets, 3 arêtes et 2 faces
$s - a + f = 3 - 3 + 2 = 2$



Graphe avec 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces
$s - a + f = 4 - 6 + 4 = 2$



Graphe avec 5 sommets, 7 arêtes et 4 faces
$s - a + f = 5 - 7 + 4 = 2$

Démonstration de la formule d'Euler :

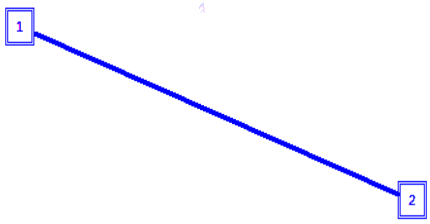
On effectue une démonstration par récurrence au niveau du nombre de sommets.

Graphe à 1 sommet :

Pour un graphe planaire connexe avec 1 sommet, on a 0 arête et 1 face donc $s - a + f = 1 - 0 + 1 = 2$.

⇒ La formule d'Euler est démontrée pour un graphe planaire connexe à 1 sommet.

Passage de 2 à 1 sommets :

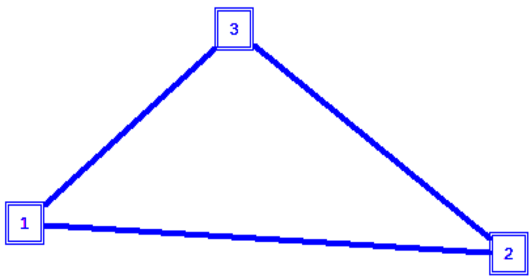


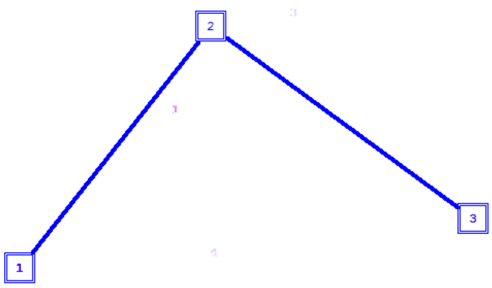
Soit un graphe planaire connexe à 2 sommets.
Ce graphe possède 1 arête et 1 face.
⇒ $s - a + f = 2 - 1 + 1 = 2$
Ce graphe respecte la formule d'Euler.
La suppression d'un sommet quelconque de ce graphe entraine la suppression de l'arête. On en revient au cas du graphe planaire connexe à 1 sommet. Or on sait que ce graphe suit la formule d'Euler.

Passage de 3 à 2 sommets :

Soit un graphe planaire connexe à 3 sommets. On a affaire à 2 cas.

Cas 1 : Le graphe possède 3 arêtes et 2 faces.
⇒ $s - a + f = 3 - 3 + 2 = 2$
Ce graphe respecte la formule d'Euler.
La suppression d'un sommet quelconque de ce graphe entraine la suppression de 2 arêtes et d'une face.
On en revient au cas du graphe planaire connexe à 2 sommets. Or on sait que ce graphe suit la formule d'Euler.



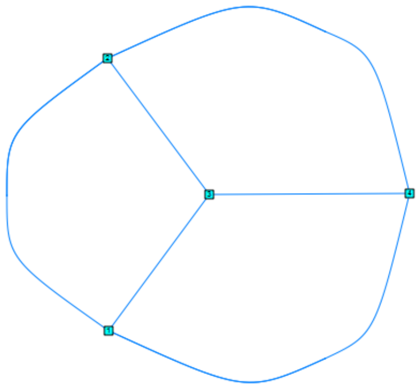


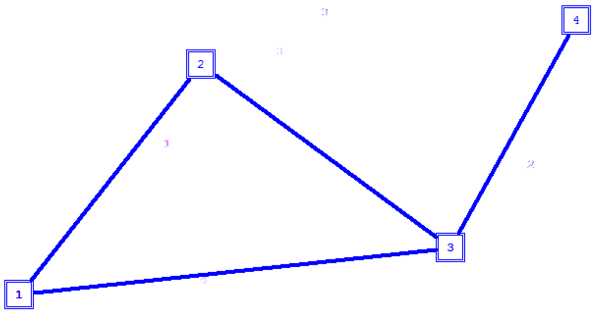
Cas 2 : Le graphe possède 2 arêtes et 1 face.
⇒ $s - a + f = 3 - 2 + 1 = 2$
Ce graphe respecte la formule d'Euler.
★ La suppression du sommet 1 ou du sommet 2 de ce graphe entraine la suppression d'une arête. On en revient au cas du graphe planaire connexe à 2 sommets. Or on sait que ce graphe suit la formule d'Euler.
★ La suppression du sommet 2 pose problème. Cela entraine la suppression de 2 arêtes. En conséquence, le graphe obtenu n'est plus connexe. Ce graphe ne répond donc pas à l'énoncé de la formule d'Euler qui nécessite un graphe connexe.

Passage de 4 à 3 sommets :

Soit un graphe planaire connexe à 3 sommets. On a affaire à 2 cas.

Cas 1 : Soit le graphe K4.
C'est un graphe avec 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
$\Rightarrow s - a + f = 4 - 6 + 4 = 2$
Ce graphe respecte la formule d'Euler.
La suppression d'un sommet quelconque de ce graphe entraine la suppression de 3 arêtes et de 2 faces.
On en revient au cas du graphe planaire connexe à 3 sommets. Or on sait que ce graphe suit la formule d'Euler.





Cas 2 : Soit le graphe ci-contre.
C'est un graphe avec 4 sommets, 4 arêtes et 2 faces.
$\Rightarrow s - a + f = 4 - 4 + 2 = 2$
Ce graphe respecte la formule d'Euler.
★ La suppression du sommet 4 de ce graphe entraine la suppression d'une arête. On en revient au cas du graphe planaire connexe à 3 sommets. Or on sait que ce graphe suit la formule d'Euler.
★ La suppression du sommet 1 ou du sommet 2 de ce graphe entraine la suppression de 2 arêtes et d'une face. On en revient au cas du graphe planaire connexe à 3 sommets. Or on sait que ce graphe suit la formule d'Euler.
★ La suppression du sommet 3 pose problème. Cela entraine la suppression de 3 arêtes. En conséquence, le graphe obtenu n'est plus connexe. Ce graphe ne répond donc pas à l'énoncé de la formule d'Euler qui nécessite un graphe connexe.

22 AVRIL 2013 :

Démonstration de la formule d'Euler

Cas d'un arbre :

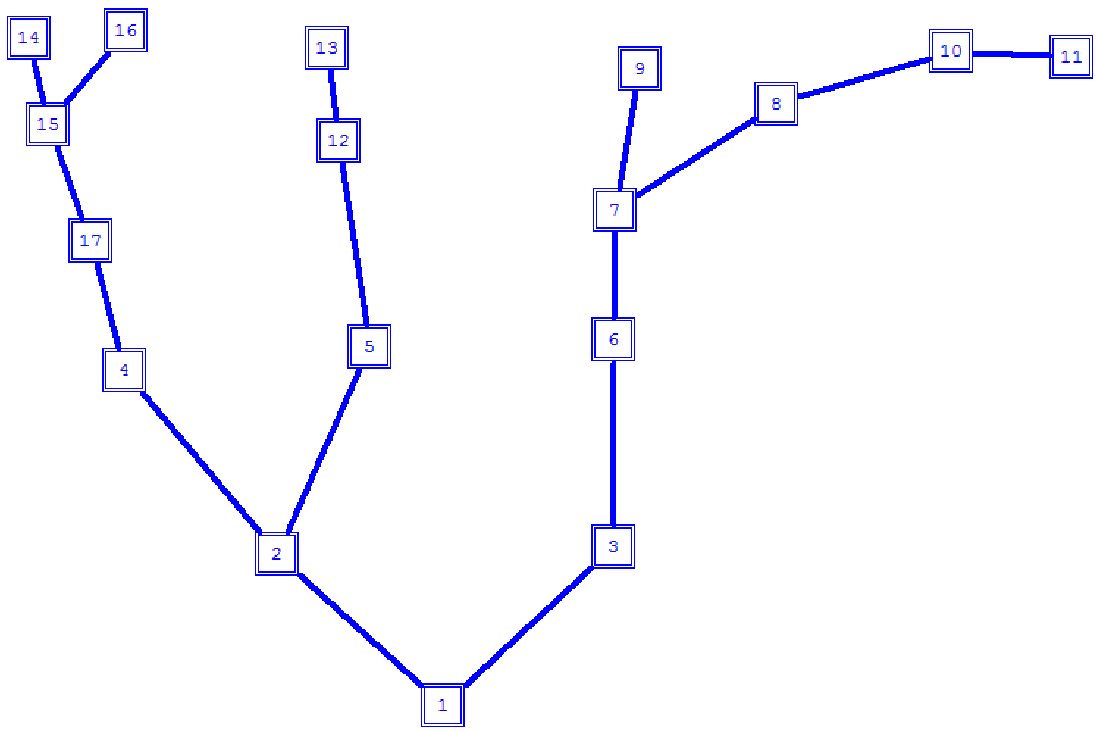
Un arbre est un graphe planaire particulier. Il s'agit d'un graphe planaire connexe où il n'y a qu'une seule face.
Il existe une relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes. Pour n sommets, il a n-1 arêtes.

Passage de s à s-1 sommets :

Considérons un graphe type «arbre » avec s sommets, 1 face et a arêtes.

On considère un graphe G de type arbre avec s sommets, a arêtes et f = 1 face. On suppose que ce graphe suit la formule d'Euler.

$$\rightarrow s - a + f = 2$$



Exemple d'un arbre avec 16 sommets

On ne peut supprimer que les sommets extérieurs, c'est-à-dire les sommets de degré 1 d'où ne partent qu'une seule arête. Si on supprime les autres sommets, on obtiendra un graphe non connexe et donc ne répondant plus à la formule de Euler.
On appelle graphe G' le graphe G avec un sommet en moins. Ce graphe a s' sommets, a' arêtes et f' faces.
Si on supprime un sommet de degré 1, on supprime donc qu'une seule arête et le nombre de face reste inchangé.

$$\begin{array}{rcl} s' - a' + f' & = & (s-1) - (a-1) + f \\ & = & s - a + f \\ & = & 2 \end{array}$$

La formule d'Euler est donc prouvée pour tout arbre quelconque. Néanmoins cela ne suffit pas à prouver que cette formule est vraie pour tous les graphes planaires connexes.
Il faut donc réussir à démontrer que tout graphe planaire connexe peut être dessiné à partir d'un arbre par simple ajout d'arêtes.

29 AVRIL 2013 :

Suite de la démonstration de la formule d'Euler :

Passage d'une face à 2 faces :

On considère un graphe G de type arbre avec s sommets, a arêtes et 1 face. On suppose que ce graphe suit la formule d'Euler.

$$\rightarrow s - a + f = 2$$

Soit un graphe G' auquel on ajoute une arête rejoignant 2 sommets quelconques du graphe G. Cette arête ne doit pas croiser une autre arête. On obtient un graphe planaire connexe.

Le graphe G' aura donc s' = s sommets, a' = a+1 arêtes et f' = f+1 faces car la nouvelle arête permet de définir une nouvelle face.

$$\begin{aligned} s' - a' + f' &= s - (a+1) + (f+1) \\ &= s - a + f \\ &= 2 \end{aligned}$$

Le graphe G' suit donc la formule d'Euler. On a montré que la formule d'Euler est valable pour tout arbre.

Passage d'un arbre à un graphe planaire quelconque :

Afin de démontrer la formule d'Euler pour tout graphe planaire connexe, il faut montrer que tout graphe planaire connexe peut être issu d'un arbre, qui est un graphe planaire connexe particulier.

Quelques définitions :

- **Chemin :** il s'agit d'une succession d'arcs parcourus dans le même sens.
- **Circuit :** on parle de circuit quand un chemin revient à son point de départ

Lemme : Tout circuit connexe peut s'obtenir en ajoutant un certain nombre d'arêtes à un arbre ayant le même nombre de sommet

On fait une démonstration par récurrence au niveau du nombre de circuit qu'on appelle n.

À n= 0, nous avons un arbre. L'arbre est donc un graphe planaire connexe donc la formule d'Euler est vérifiée.

On suppose que le résultat établit pour tous les graphes connexes ayant au plus n circuit. Soit un graphe connexe G ayant n+1 circuit, on considère le graphe G' obtenu en enlevant une arête à l'un des circuits donc G' est un graphe connexe ayant n circuit. Comme on enlève une arête d'un circuit on enlève 1 seul circuit or les circuits de G' appartiennent à G donc on a strictement moins de circuits dans G'.
Selon l'arête supprimée, on peut supprimer plus d'un circuit car cette arête appartiendrait à plusieurs circuits.
On considère 2 sommets S et S' appartenant à G ces sommets étant reliés par une arête. Ces 2 sommets se retrouvent dans G'.
2 cas possibles :

- Si l'arête supprimée ne passe pas par le circuit entre ces deux sommets il existe donc dans G et à fortiori dans G' un chemin reliant S à S'
- Si l'arête supprimée se trouve entre S et S', il existe un chemin reliant S et S' dans G' ne passant pas par cette arête → G' est encore connexe

Donc par récurrence, le graphe G' peut s'obtenir à partir d'un arbre auquel on rajoute un certain nombre d'arêtes et de G' on retrouve G par simple ajout d'une arête.

Donc tout graphe planaire connexe peut s'obtenir à partir d'un arbre.

Or nous avions vu plus haut que la formule d'Euler était vraie pour un arbre quelconque elle est donc vraie pour tout graphe planaire connexe.

7 MAI 2013 :

Application aux cartes de géographie :

Une carte de géographie peut être assimilée à un graphe planaire :

- On considère les océans comme un pays.
- Tout d'abord, il est connexe car tous les sommets de la carte (les pays) sont reliés par des arêtes.
- La cartes peut se dessiner sans croisement d'arêtes car cela signifierait que s'il existe un point de croisement entre deux frontières sur la carte, c'est-à-dire un point ou se rencontrent 4 pays possibles si un point peut être réduit à une frontière, ce qui d'après nos conditions est impossible.

Essayons de prouver qu'une carte possède un sommet d'où part au plus 5 arêtes.

Définissons tout d'abord le terme de « degré d'un sommet » : c'est le nombre d'arêtes qui partent ou qui arrive à un sommet (notre graphe n'étant pas orienté, cela revient au même).

Tentons de raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un sommet d'où part 6 arêtes :

- Soit f_a le nombre de faces bordées par a arêtes (on parle de a-faces)
- Soit n_a le nombre de sommet de degré a

Une face est bordée au minimum par trois arêtes soit f le nombre total de face

$$f = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 \dots \ (1)$$

Chaque sommet a au moins un degré égal à 6 donc le nombre total de sommet

$$n = n6 + n7 + n8 \dots \ (2)$$

Chaque arête contribue pour 1 unité au degré de 2 sommets étant donné qu'une arête relie 2 sommets par définition soit le nombre total d'arête

$$a' = 6n6 + 7n7 + 8n8 \dots. \ (3)$$

On compte les faces bordées par chaque arêtes à chaque fois il y a 2 faces par arêtes donc 2a' faces. Néanmoins on a compté a fois a-faces on a donc compté a X a-faces donc le décompte total des faces donne

$$2a' = 3f3 + 4f4 + 5f5 \dots. \ (4)$$

Calculons (4) – 3 × (1) :

$$2a' - 3f = (3f3 + 4f4 + 5f5 \dots) - 3(f3 + f4 + f5 \dots.)$$

On obtient en simplifiant $2a' - 3f \geq 0$

D'où $2a' \geq 3f$

Calculons (4) – 6 × (2) :

$$2a' - 6n = (3f3 + 4f4 + 5f5..) - 6(n6 + n7 + n8..)$$

On obtient en simplifiant $2a' - 6n \geq 0$

D'où $a' \geq 3n$

En se servant des deux derniers résultats on a :

$$2a' + a' \geq 3f + 3n$$

D'où $a' \geq f + n$

Or d'après la formule d'Euler $f - a' + s = 2$ donc $f + n = a' + 2$, nous avons donc une contradiction.

Nous pouvons ainsi conclure qu'il existe dans un carte de géographie un sommet d'où parte **au plus** 5 arêtes.

Nombre chromatique d'un graphe

« Ce concept remonte à la célèbre conjecture de Guthrie (1852) relatif au coloriage des cartes géographiques à la Société Mathématique de Londres et rappelé en 1872 par Cayley : il suffirait de quatre couleurs pour que, quelle que soit la configuration géopolitique, deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs différentes. »

On appelle **nombre chromatique** d'un graphe le nombre minimal de couleurs à utiliser afin que chaque sommet du graphe soit colorié de sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.

Il existe 3 propriétés découlant de cette conjecture :

- ★ Le nombre chromatique d'un graphe complet est égal au nombre de ses sommets (c'est à dire l'ordre du graphe).
- ★ Si un graphe G contient un sous-graphe complet G', alors le nombre chromatique de G est au moins égal à l'ordre chromatique de G'.
- ★ Le nombre chromatique d'un graphe est au plus égal à k + 1, k désignant le plus haut degré des sommets.

Appliquons cette dernière propriété à la démonstration faites ci-dessus comme nous l'avons prouvé le plus haut degré d'une carte de géographie est 5 donc le nombre chromatique d'une carte est 6.

NOUS POUVONS AINSI CONCLURE QUE 6 COULEURS SUFFISENT À COLORIER N'IMPORTE QUELLE CARTE DE GÉOGRAPHIE.

CONCLUSION

À travers de ce projet de Maths en JEANS, on a démontré que pour colorier n'importe quelle carte avec 6 couleurs.

Il existe des démonstrations permettant de prouver que 5 couleurs suffisent à colorier une carte mais nous n'en traiteront pas par souci de temps. De plus, il existe également un théorème intitulé théorème des 4 couleurs mais celui-ci bien qu'étant admis n'a pas pu être formellement démontré sans ordinateur.

Ce problème du coloriage des cartes nous a permis d'aborder la théorie des graphes et toutes les formules principales qui s'y rattachent. Cependant la théorie des graphes est vaste et il reste encore beaucoup de points non traités notamment les graphes non connexes ou l'orientation des graphes.

BIBLIOGRAPHIE – WEBOGRAPHIE :

Wikipédia :

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_quatre_couleurs
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_planaire

Initiation à la théorie et à la pratique des GRAPHES (Gérard GRANCHER [UMR 6085 CNRS - Université de Rouen]) : http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/General/Lycee/TheorieDesGraphes/Docs/GraphesGrancher/GraphesPpt.pdf

Graphes planaires :
http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/combi/planaire.pdf

Théorème des 5 couleurs (IREM de Rennes) → http://www.irem.univ-rennes1.fr/viedelirem/agrint/cours/courstheoremecinqcouleurs.pdf

Graphes planaires - Classes de graphes & Décompositions (Eric Thierry)
→ http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/planar-slides.pdf

Introduction à la théorie des graphes (Didier Müller**)**
→ http://www.nymphomath.ch/graphes/graphes.pdf