

I Recherche du nombre de plus courts chemins

Avant de commencer la recherche du chemin optimal d'un cube coloré, d'une case à une autre (ce qui était pour nous le premier objectif à attendre), nous avons pris l'initiative de chercher le nombre de plus courts chemins d'un cube qui ne l'était pas.

Notre première problématique était alors déjà toute trouvée: Soit un damier (une grille ou une matrice) de taille $n \times m$ avec n et $m \in \mathbb{N}_+^*$, et un cube (polyèdre à 6 faces) posé initialement sur la case $x=0$ et $y=0$ du damier, (avec x et $y \in \mathbb{N}_+^*$, deux indices du damier permettant de connaître la position du cube sur le damier). On choisit ensuite une case de la grille de coordonnées (n, y) ; quel est alors le nombre de plus courts chemins que le cube peut effectuer pour arriver à la case précédemment sélectionnée en partant, bien sûr, de son point d'origine?

Mais cette problématique était déjà bien compliquée. Nous avons donc changé l'intitulé en remplaçant une grille de taille $n \times m$ par une grille de taille $n \times n$.

Le problème était encore trop compliqué... Nous avons donc changé encore l'intitulé pour que la case d'arrivée ne soit plus de coordonnées n et y , mais de coordonnées $n=n-1$ et $y=n-1$. Et c'est à cet instant qu'on a pu commencer.

- Soit un damier 1×1 : le cube est alors posé sur l'unique case du damier et doit se retrouver en $(n-1, n-1)$ soit $(0,0)$ puisque $n=1$. L'Hexaèdre se retrouve être à la fois sur la case de départ et sur la case d'arrivée, sans possibilité de mouvement.

Il existe alors une seule possible de plus court chemin. S'il existait une suite $(sol_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui donnerait le nombre de plus courts chemins pour l'application désirée, on aurait alors :

$$sol_1 = 1$$

- Nous avons continué à compter, à la main, toutes les possibilités de plus courts chemins pour n compris entre 2 et 4

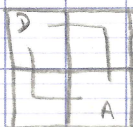
$$sol_2 = 2$$

$$sol_3 = 6$$

$$sol_4 = 20$$

Pour y parvenir nous avons tout simplement tracé toutes les possibilités sur les grilles de taille $n \times n$

Exemple :

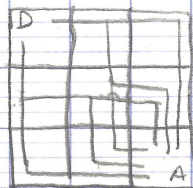


D = case de départ (où le cube est initialement posé)

A = case d'arrivée

— = plus court chemin

grille 2×2 : 2 plus courts chemins



D = case de départ (où le cube est initialement posé)

A = case $(n-1, n-1)$, case d'arrivée

T = plus court chemin

grille 3×3 : 6 plus courts chemins

Pour $n=5$, le schéma des différentes solutions était devenu trop compliqué, voir illisible; et il était de plus en plus dur de compter, à la main, le nombre de plus courts chemins.

Il m'était alors venu à l'idée d'essayer une formule, à base de sommes, qui correspondait plus ou moins aux résultats obtenus.

Mais c'est en trouvant le nombre exact de plus courts chemins pour une grille de taille 5×5 que je me suis aperçue que ma formule était fautive. En effet nous étions enfin parvenus au résultat suivant:

$$sol_5 = 70$$

Après l'obtention de ce résultat nous sommes restés plusieurs jours bloqués, à ne plus savoir quoi faire.

Au bout d'une semaine je me suis dit qu'il faudrait retourner à la problématique d'une grille de taille $n \times m$, plutôt que $n \times n$; et c'est alors que j'ai trouvé la solution au nombre de plus courts chemins.

Je vais donc maintenant expliquer la procédure que j'ai employée :

① Premièrement, je me suis mis à regarder le nombre de solutions pour une grille $1 \times n$ avec $n \in \mathbb{N}_+^*$, en augmentant n au fur et à mesure et voici mes résultats :

$n=1$

1×1 :

D
A

 : 1 solution de plus court chemin

$n=2$

1×2 :

D	
	A

 : idem

$n=3$

1×3 :

D		
		A

 : idem

$1 \times n$:

D			

 ...

	A

 ?

Puis je me suis mis à regarder le nombre de solutions pour une grille $n \times 1$ avec $n \in \mathbb{N}_+^*$, toujours en augmentant n au fur et à mesure :

$n=2$

2×1 :

D
A

 : 1 solution de plus court chemin

$n=3$

3×1 :

D
A

 : idem

$n \times 1$:

D
A

 ?