LOGIQUE & CALCUL

Des cartes bien mélangées

Les mathématiciens comprennent de mieux en mieux le mélange des cartes. Toutefois, malgré des avancées significatives, l'affaire reste délicate.

Jean-Paul DELAHAYE

Quand nous faisons un tour *de magie avec des cartes* ou plus simplement avant de les distribuer, nous les mélangeons. Ce faisant, notre but est d'arriver à un désordre convenable qui ne favorise aucune distribution et aucun joueur. Mais qu'est-ce que cela signifie vraiment ? Les mathématiques aident-elles à mieux cerner le problème ?

De nombreuses personnes s'étonnent quand on leur dit qu'il y a des progrès en mathématiques. Pour elles, cette science millénaire est à un point de maturité tel que les découvertes et les nouveautés y deviennent rares. Sur un sujet banal comme le mélange d'un paquet de cartes, il n'y a, pensent-elles, certainement plus rien à dire. C'est totalement faux. Non seulement les mathématiques n'ont jamais été aussi *actives, mais, même sur des sujets apparemment* élémentaires et aussi anciens que le mélange des cartes, de nouvelles connaissances sont élaborées chaque *année. Certaines recherches récentes* répondent enfin aux questions que tout joueur se pose sur le désordre du paquet.

Deux grands types de méthodes conduisent à des questions et des mathématiques différentes : les mélanges déterministes et les mélanges probabilistes.

Un mélange déterministe est tel que quand nous l'effectuons une première fois, puis une seconde en remettant le paquet dans le même ordre initial, nous obtenons exactement le même résultat. Le hasard n'intervient pas.


Francesco de Comité

Les mélanges probabilistes ne donnent *pas le même ordre des cartes à chaque fois*, car ils dépendent de facteurs aléatoires et qui échappent à celui effectuant la manipulation, sauf s'il triche.

Commençons par le plus simple des mélanges déterministes, qui est le mélange *Faro Out* (on dit aussi *Pharaon Out*, ou *Perfect Shuffle* en anglais).

– On coupe le paquet en deux parties ayant exactement le même nombre de cartes, le dessus A et le dessous B. On les intercale de façon à alterner parfaitement les cartes du paquet A et du paquet B, et en s'assurant que la carte du dessus du paquet A reste en première position dans le paquet mélangé (la dernière carte reste alors aussi en place).

Exemple : le paquet (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) est séparé en deux, (1, 2, 3, 4) et (5, 6, 7, 8), *ce qui, après l'intercalation des deux petits* paquets, donne l'ordre (1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8). Si, au moment de l'insertion, on fait passer la carte numéro 1 de A en position 2, ce qui *donne* (5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4), *le mélange est* nommé *Faro In*. En opérant trois fois de suite le *Faro Out* sur un paquet de huit cartes, on revient à l'ordre initial : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) → (1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8) → (1, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 8) → (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Les prestidigitateurs connaissent bien ces mélanges et certains savent les faire de manière parfaite plusieurs fois de suite. Un petit film (http://bit.ly/pls425_delahaye_houston) montre le mathématicien Kevin Houston, de l'Université de Leeds, réaliser huit fois de suite un *Faro Out* avec un jeu de

52 cartes... ce qui le remet en ordre. Pour le *Faro Out*, le nombre k de fois qu'il faut opérer le mélange pour revenir à l'ordre initial dépend du nombre n de cartes. Il est donné par la liste $[n,k]$ = [2,1], [4,2], [6,4], [8,3], [10,6], [12,10], [14,12], [16,4], [18,8], [20,18], [22,6], [24,11], [26,20], [28,18], [30,28], [32,5], [34,10], [36,12], [38,36], [40,12], [42,20], [44,14], [46,12], [48,23], [50,21], [52,8].

Vous compléterez ce tableau si vous le voulez en sachant que si n est pair, le temps de retour pour le mélange *Faro Out* est le plus petit entier k tel que $2^k - 1$ soit un multiple de $n - 1$.

Quel que soit le nombre de cartes, le *Faro Out* opéré de manière répétitive ramène toujours l'ordre initial et cette propriété est vraie pour tout mélange déterministe. En répétant le même mélange déterministe, quel qu'il soit, vous finissez toujours par retrouver le paquet tel qu'il était avant de commencer. *Cette propriété résulte de ce que l'on sait en théorie des groupes depuis le* XIX[e] siècle.

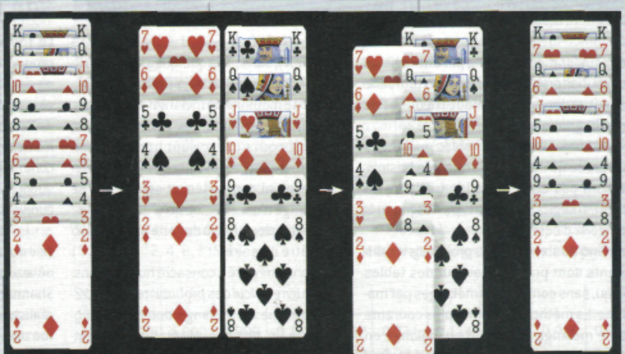
La méthode générale pour calculer le temps de retour d'un mélange déterministe n'est pas compliquée : on repère la taille des cycles du mélange (avec huit cartes, pour le *Faro Out*, la carte 2 passe en position 3, puis en position 5, puis revient en position 2 : elle décrit un cycle d'ordre 3) et on calcule le plus petit commun multiple des cycles.

Déplacements contrôlés

Cependant, ce résultat n'est qu'un point de départ et une théorie complète des mélanges *Faro Out* et *Faro In* n'a été formulée qu'en 1983 par Persi Diaconis, Ron Graham et William Kantor. Parmi les propriétés des mélanges déterministes *Faro Out* et *Faro In*, celle-ci est très jolie et sert de base à divers tours de magie. En enchaînant les mélanges *Faro Out* et *Faro In* de manière appropriée, on déplacera la carte située au-dessus du paquet pour qu'elle se retrouve en position n. La méthode est la suivante. On décompose en base 2 l'entier $n - 1$. Ainsi, pour $n = 7$, $n - 1$, soit 6, s'écrit 110. Pour déplacer la carte du dessus vers la position n, on lit les 1 de la décomposition en base 2 comme des I de *In* et les 0 comme des O de *Out*. Pour 110, la consigne est donc de faire, dans l'ordre, les opérations *Faro In*, *Faro In*, *Faro Out*. Vérification : $[1,2,3,4,5,6,7,8] \xrightarrow[\text{Faro In}]{} [5,1,6,2,7,3,8,4] \xrightarrow[\text{Faro In}]{} [7,5,3,1,8,6,4,2] \xrightarrow[\text{Faro Out}]{} [7,8,5,6,3,4,1,2]$. La carte du dessus est passée en position 7.

Le problème inverse, posé par le Britannique Alex Elmsley (le découvreur de cette méthode pour déplacer la carte du dessus), est resté irrésolu plus de 30 ans. Dans quel ordre faut-il exécuter les *Faro Out* et *Faro In* de façon à déplacer la carte située en position n vers le dessus ? La solution générale n'a été donnée qu'en 2007 par P. Diaconis et R. Graham. Elle est un peu trop *compliquée pour être décrite ici... et surtout*

Les mélanges *Faro Out* et *Faro In*



Le mélange de cartes *Faro Out* (ou *Pharaon*) est le mélange déterministe qui consiste à intercaler parfaitement la moitié supérieure du paquet dans la moitié inférieure en s'arrangeant pour que la première carte du paquet reste la première carte après le mélange (si elle passe en second, il s'agit du *Faro In*). Bien que difficile à réaliser, de nombreux prestidigitateurs et quelques mathématiciens réussissent la séparation parfaite en deux paquets ayant le même nombre de cartes, suivie de l'insertion parfaite des deux moitiés.

Comme pour tous les mélanges où aucun hasard n'intervient, en opérant le mélange *Faro Out* plusieurs fois, on finit par reconstituer l'ordre initial du paquet. Pour un jeu de 52 cartes, il faut opérer huit fois de suite.

Ce mélange a été utilisé pour tricher. Une première mention en est faite dans le livre anonyme *Whole Art and Mystery of Modern Gaming* paru à Londres en 1726. Aux États-Unis, il est expliqué dans des livres de tricherie en 1843 à Cincinnati, et en 1860 à New York. L'idée d'utiliser les mélanges *Faro* dans des tours de magie est mentionnée en 1919 dans un ouvrage de C. T. Jordan. Le mathématicien Paul Lévy s'y intéressa dans les années 1940-1950 et démontra que si le nombre de cartes est une puissance de 2, disons 2^k, alors k mélanges *Faro Out* successifs ramènent au paquet initial.

Alex Elmsley, informaticien à Londres, découvrit en 1975 le procédé permettant de faire passer la carte du dessus à la position n. Une théorie complète de ces mélanges a été proposée en 1983 par Persi Diaconis, Ron Graham et William Kantor, mais ce n'est qu'en 2006 que P. Diaconis et R. Graham ont réussi à trouver, dans le cas général, la séquence de *Faro Out* et de *Faro In* permettant de déplacer la carte en position initiale n pour qu'elle aboutisse sur le dessus du paquet.

Francesco de Comité

Un casino mauvais joueur !

Battre les cartes est important, comme le montre l'histoire suivante arrivée en avril 2012 au casino *The Golden Nugget* à Atlantic City (ville réputée pour ses jeux sur la côte Est des États-Unis), qui risque de perdre 1,5 million de dollars au minibaccara. Le fournisseur de jeux de cartes du casino, qui ne devait livrer que des jeux bien mélangés, commit l'erreur d'enfournir qui ne l'étaient pas. Le croupier inattentif utilisa, sans s'apercevoir de son erreur, un paquet parfaitement classé. Des joueurs remarquèrent la régularité des cartes qui sortaient et, en l'exploitant, gagnèrent 41 fois de suite (leurs mises allaient bien sûr en croissant). Les surveillants de la salle du jeu, voyant ces gains anormaux, se précipitèrent. Ils soupçonnèrent une subtile arnaque avant de comprendre, un peu tard, qu'il n'y en avait pas.

Le casino refusa de payer les gains des joueurs qui n'avaient pourtant enfreint aucune règle. Les tribunaux sont maintenant chargés de régler l'affaire, les joueurs réclamant leur dû. Le casino se défend en prétextant que le jeu était illégal du fait que les cartes n'étaient pas mélangées, mais il attaque aussi le fournisseur de jeux de cartes qui a commis l'erreur initiale. L'avocat des joueurs avance, lui, l'argument qu'« il n'existe aucune loi de l'État du New Jersey permettant au *Golden Nugget* de déclarer le jeu nul parce qu'un jeu de cartes classé a été utilisé ». (Voir www.dailymail.co.uk/news/article-2191343/Casino-sues-gamblers-won-1-5m-unshuffled-cards.html.)

pour être pratiquée de tête par un magicien qui souhaiterait l'utiliser pour un tour; elle constitue donc une méthode théorique de prestidigitation !

Venons-en aux véritables mélanges qui, parce qu'ils se fondent sur le hasard, ne sont pas utilisés par les tricheurs ou les prestidigitateurs, mais par les joueurs soucieux d'équité.

Cinq ou six mélanges probabilistes différents sont pratiqués autour des tables de jeu, sans compter les mélanges par machine. La méthode de loin la plus courante est le mélange américain ou mélange en queue-d'aronde. Il consiste à opérer comme pour le mélange pharaon, mais de manière imparfaite... ce qui est plus facile !

Après avoir séparé le paquet en deux parties A et B à peu près égales, on les insère l'une dans l'autre. Cela produit un nouveau paquet contenant dans l'ordre : quelques cartes du début de A, suivies de quelques cartes du début de B, suivies de quelques cartes de A (venant après celles déjà utilisées de A), suivies de quelques cartes de B (venant après celles déjà utilisées de B), etc. Cette méthode de mélange semble très bonne, car les nombreux petits paquets de cartes qui s'intercalent bouleversent totalement et de manière imprévisible l'ordre initial des cartes, et cela même si le mélange n'est effectué qu'une seule fois. Comment aller au-delà de cette impression, peut-être illusoire ?

Henri Poincaré a consacré huit sections de son livre *Calcul des probabilités* de 1912 au problème du mélange des cartes. Il y propose un résultat général concernant les mélanges aléatoires et qui s'applique donc au mélange américain. Poincaré établit qu'à la longue, ces mélanges désordonnent vraiment un jeu. Le nombre de façons dont on peut ordonner n cartes est égal à $n(n-1)(n-2)...1$, produit noté $n!$ (« factorielle n »). Un jeu est bien battu quand aucun ordre particulier de cartes n'est plus probable qu'un autre. Par une méthode qui anticipe ce que l'on nommera « les chaînes de Markov », Poincaré démontre que plus on effectue un mélange probabiliste, plus la probabilité que le paquet de n cartes soit dans un ordre donné s'approche de $1/n!$. Conformément à l'intuition de tout joueur de cartes, un mélange aléatoire effectué avec suffisamment d'application produit exactement ce qu'on attend : un choix équitable entre tous les ordres possibles du paquet de cartes.

Malheureusement, Poincaré n'indique rien sur la vitesse avec laquelle les probabilités des différents ordres s'approchent de $1/n!$; ses travaux ne nous informent donc pas sur le nombre de mélanges à effectuer en pratique avant de pouvoir s'arrêter quand on est à la table de jeu. Les mathématiciens français Émile Borel, Jacques Hadamard et Paul Lévy se sont aussi intéressés aux problèmes du mélange d'un paquet de cartes. Borel, sans en produire de démonstration, formula l'idée que pour bien mélanger un jeu de 52 cartes, sept mélanges américains suffisent.

Un modèle mathématique du mélange américain

La théorie mathématique permettant de prouver rigoureusement cette affirmation ne viendra que progressivement de travaux plus tardifs que nous allons décrire. Le nom de Persi Diaconis, cet extraordinaire mathématicien américain qui commença sa vie comme illusionniste professionnel et la poursuivit comme professeur de statistiques à l'Université de Stanford, reviendra souvent.

Le premier pas vers l'évaluation précise du nombre de mélanges à effectuer est dû aux Américains Edgar Gilbert et Claude Shannon qui décrivent en 1955 un modèle réaliste de ce qui se passe quand on effectue une opération de mélange américain. Ils proposent que le paquet est séparé en deux paquets (généralement inégaux) de p et p' cartes ($p+p'=n$) avec la probabilité $C(n,p)/2^n$, où $C(n,p)$ est le célèbre coefficient du binôme de Newton, égal à $n!/[p!(n-p)!]$. Cette hypothèse sur la probabilité de séparer un paquet en deux correspond à la densité dite binomiale (ou « courbe en cloche ») qui est considérée comme la plus vraisemblable pour un phénomène de cette nature.

Si par exemple vous séparez en deux un paquet de huit cartes, cette loi binomiale indique que vous aurez la séparation 4-4 dans 27,4 % des cas, la séparation 3-5 (ou 5-3) dans 21,9 % de cas, la séparation 2-6 (ou 6-2) dans 10,9 % des cas, la séparation 1-7 ou 7-1) dans 3,1 % des cas, et la séparation 0-8 (ou 8-0) dans 0,4 % des cas. Le dernier cas est un peu étrange, mais l'exclure ne changerait pas grand-chose.

Pour l'insertion des deux paquets obtenus l'un dans l'autre, le modèle de Gilbert et Shannon est, à nouveau, aussi simple et naturel que possible : lorsqu'on intercale un paquet A de p cartes dans un paquet B de p' cartes, la probabilité pour que la première carte du nouveau paquet soit la carte au-dessus de A est $p/(p+p')$, et elle est de $p'/(p+p')$ que ce soit la carte au-dessus de B. La même idée est reprise quand une ou plusieurs cartes sont déjà déterminées en tête du nouveau paquet, et qu'il reste à insérer deux paquets devenus plus petits.

Des expériences réalisées par P. Diaconis en 1988 ont confirmé que le modèle de Gilbert et Shannon est satisfaisant et constitue donc une bonne modélisation mathématique, un peu idéalisée mais pas trop, de ce qu'on fait quand on effectue le mélange américain. Restait à exploiter ce modèle pour évaluer le nombre de mélanges nécessaires à une mise en désordre convenable du jeu de cartes.

La solution a été publiée en 1992 par Dave Bayer et P. Diaconis (toujours lui !). Elle se fonde sur une élégante idée mathématique. D'abord, on considère une généralisation du mélange américain et de son modèle théorique : au lieu de séparer le paquet initial en deux, on le sépare en a sous-paquets qui sont ensuite insérés simultanément les uns dans les autres. Plus précisément, le nouveau paquet est constitué en prenant les cartes une à une avec des probabilités proportionnelles aux nombres de cartes de chaque paquet. Le modèle mathématique de cette généralisation reprend les mêmes idées que pour le mélange américain avec une séparation en deux. Un tel mélange, qui demanderait en pratique de disposer de a mains, se dénomme a-mélange américain.

Ensuite, et c'est la clef de tout, les chercheurs ont montré qu'effectuer un a-mélange américain suivi d'un b-mélange américain équivaut à réaliser un ab-mélange américain. Ce beau résultat permet d'affirmer que réaliser k fois un mélange américain habituel (c'est-à-dire un 2-mélange américain) revient à effectuer un 2^k-mélange américain. Grâce à cette vision simplifiée de ce qu'est l'opération de mélange américain répétée k fois, il devient possible de connaître la probabilité exacte que k mélanges américains consécutifs produisent un ordre donné, ce qui permet alors de savoir si l'on s'est assez approché du mélange idéal, où chaque ordre possible a une probabilité $1/n$!.

Une formule inattendue

La formule mesurant la qualité du mélange obtenu après un a-mélange américain est remarquable et il est même étonnant qu'une formule aussi simple existe pour décrire l'effet d'une manipulation plutôt compliquée. Voici le résultat et la formule :

La probabilité d'obtenir l'ordre O, par exemple $O = (3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1)$, après un a-mélange américain d'un paquet de n cartes est : $C(a + n - \mathrm{sm}(O), n) / a^n$.

Dans cette formule, C désigne comme précédemment les coefficients du binôme de Newton et sm(O) est le nombre de suites montantes dans la décomposition de O en suites montantes. Pour notre exemple, sm(O) vaut 4, car (3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1) se décompose en quatre suites montantes : (3, 8), (5), (2, 4, 6, 7), (1).

Voyons une application de la belle formule de Bayer et Diaconis. Partant d'un paquet classé (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) et opérant un 2-mélange américain trois fois de suite, ce qui équivaut à un 8-mélange américain (donc $a = 8$), on obtiendra l'ordre (3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1), avec une probabilité $C(8+8-4, 8)/8^8 = 12!/(8!4!8^8) \approx 2{,}95 \times 10^{-5}$.

C'est assez proche du 1/8 ! attendu, égal à $2{,}48 \times 10^{-5}$. L'écart entre la probabilité d'obtenir (3, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 1) que donnerait un mélange idéal (1/8 !) et celle que donne le 2-mélange américain effectué trois fois est de $0{,}47 \times 10^{-5}$. Bien sûr, une série de mélanges américains ne sera satisfaisante que si l'écart entre le $1/n$! attendu et la probabilité d'avoir l'ordre O est petit en moyenne quand O varie, ou mieux, si on obtient une somme assez petite quand on additionne tous les écarts pour les n ! ordres possibles.

Cette somme mesure si un mélange américain appliqué k fois est acceptable. Pour que le maximum possible de cette distance soit 1 (ce qui est un repère commode), on calcule la distance d'un mélange américain au cas idéal (où tous les ordres sont équiprobables) en calculant la demi-somme de tous les écarts possibles. Le tableau de résultats ci-dessous, calculé par D. Bayer et P. Diaconis, indique, pour un paquet de n cartes et pour une opération de mélange américain réalisée k fois, la distance obtenue avec le mélange idéal : quand la distance est proche de 1, le mélange est mauvais ; plus la distance est petite, meilleur il est.

Lorsque la distance est inférieure à 1/10, le mélange est jugé convenable : en moyenne,

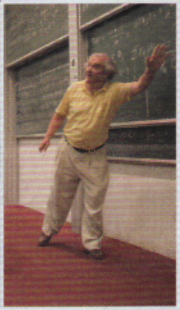
n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25	1,000	1,000	0,999	0,775	0,437	0,231	0,114	0,056	0,028	0,014
32	1,000	1,000	1,000	1,929	0,597	0,322	0,164	0,084	0,042	0,021
52	1,000	1,000	1,000	1,000	0,924	0,614	0,334	0,167	0,085	0,043
78	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,893	0,571	0,307	0,153	0,078
104	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,988	0,772	0,454	0,237	0,119
208	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,914	0,603	0,329
312	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,883	0,565

CE TABLEAU INDIQUE, POUR UN PAQUET DE N CARTES et un mélange américain réalisé k fois, la distance séparant le résultat obtenu de celui du mélange idéal, où tous les ordres ont la même probabilité $1/n$! d'apparaître.

Persi Diaconis, magicien et mathématicien

Persi Diaconis mène des travaux de recherche mathématique aussi bien au sujet des mélanges déterministes qu'au sujet des mélanges aléatoires de cartes. Il s'est aussi intéressé à la physique du pile ou face. Ses résultats ont fait progresser considérablement nos connaissances sur les mélanges de cartes.

Son parcours professionnel est assez singulier. Il est né en 1945. À l'âge de 14 ans, il quitte sa famille pour suivre le prestidigitateur canadien Dai Vernon qui le forme et fait de lui un magicien professionnel. Il pratique le métier durant une dizaine d'années sous le nom de Persi Warren. En 1971, comme il se l'était promis, il reprend ses études... et y réussit assez bien, puisqu'il soutient une thèse à l'Université Harvard en 1974.

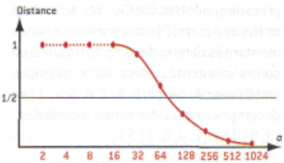


Son ami Martin Gardner expliquait que P. Diaconis jouait au poker pour payer ses études. Il précisait malicieusement que P. Diaconis avait une formidable technique pour le « second deal » et le « bottom deal », qui permettent, quand on distribue les cartes, de donner la deuxième ou la dernière carte du paquet au lieu de la première. P. Diaconis, aujourd'hui professeur de statistiques à l'Université de Stanford, vient de publier avec Ron Graham un livre remarquable sur les idées mathématiques utiles en prestidigitation (*Magical Mathematics : The Mathematical Ideas that Animate Great Magic Tricks*, Princeton University Press, 2011).

la probabilité de chaque ordre possible est à 10 % près celle que donnerait un mélange idéal obtenu après une infinité d'opérations de mélange. Pour un jeu de 52 cartes, on retrouve ce que pensait Borel : sept ou huit mélanges américains sont satisfaisants. La courbe ci-contre indique ce que donne un a-mélange américain pour un jeu de 52 cartes. Les valeurs de a retenues sont les puissances de 2 qui correspondent à un mélange américain usuel effectué une fois, deux fois, trois fois, etc.

La courbe montre clairement un « seuil *de bon mélange » : faire le mélange une* fois, deux fois, trois fois, quatre fois, cinq fois est insuffisant. À partir de six fois, le mélange devient acceptable, mais ce n'est qu'au-delà de dix fois (pour $a = 2^{10} = 1024$) que l'on sera vraiment proche de 0.

Des études complémentaires menées depuis l'article de 1992 et la prise en considération de calculs fondés sur des distances plus exigeantes indiquent que si sept mélanges américains sont convenables pour 52 cartes, il faut plutôt en faire une douzaine pour se prémunir contre toute triche ou toute mauvaise surprise. Signalons que la magnifique formule donnée plus haut ne rend pas les calculs faciles pour autant : il y a en effet n ! ordres possibles pour un paquet de n cartes (pour 52, cela donne $8{,}1 \times 10^{67}$) et il faut donc ruser pour calculer la demi-somme de tous les écarts, qui mesure la qualité d'un mélange.



LA DISTANCE entre le résultat d'un a-mélange américain et celui d'un mélange idéal, pour un jeu de 52 cartes et différentes valeurs de a.

L'industrie du jeu n'a pas été indifférente à ces résultats. Aujourd'hui, par exemple, certaines machines à battre les cartes sont programmées pour effectuer les sept mélanges américains conseillés. Les compétences de P. Diaconis sont d'ailleurs appréciées par les ingénieurs qui conçoivent des machines à battre les cartes.

Batteuses de cartes sur le banc d'essai

Une entreprise souhaitant commercialiser une telle machine fondée sur un principe différent du mélange américain s'est ainsi adressée à lui pour qu'il prouve que la machine produisait de bons mélanges. La machine répartissait les cartes sur dix étagères internes en plaçant les cartes une à une aléatoirement sur les étagères et en glissant chaque nouvelle carte au hasard sous ou sur le paquet déjà présent. À la fin de cette distribution sur les dix étagères internes, la machine regroupait les dix paquets constitués en utilisant encore un ordre aléatoire pour les empiler. Le hasard utilisé par cette machine pour chacune de ces opérations était un hasard numérique tiré d'un générateur pseudo-aléatoire.

L'étude du dispositif par l'équipe de P. Diaconis fut une déception pour les industriels. En effet, les conclusions mathématiques sont les suivantes. *a)* La phase finale du mélange des dix paquets posés sur les étagères est inutile et la machine est donc inutilement compliquée. *b)* Une seule application du mélange effectué par la machine est insuffisante et rend possible certaines triches. *c)* En opérant deux fois le mélange effectué par la machine, on arrive à un résultat satisfaisant. La conclusion *(c)* ne convenait pas aux ingénieurs qui, pour accélérer le rythme des jeux, voulaient mettre au point la première machine capable de faire un bon mélange en une seule fois.

Récemment, quatre nouveaux types de questions ont été envisagés.

(1) Autres mélanges. Toutes sortes de mélanges aléatoires autres que le mélange américain ont été étudiés. On s'est par exemple intéressé au mélange *top-to-random* consistant à répéter l'opération suivante : on prend la carte du dessus du paquet et on la glisse au hasard dans le reste. Pour ce mélange aléatoire, Lerna Pehlivan a montré en 2010 que l'opération devait être répétée environ $4n \log_2(n)$ fois si on voulait atteindre un désordre de niveau convenable.

(2) Cartes répétées. Dans certains jeux, tel le black-jack pratiqué dans les casinos, seule importe la hauteur des cartes, et donc tous les as, ou tous les rois, sont équivalents. Ce qui compte pour un mélange est donc non pas d'obtenir un paquet de n cartes quelconques, mais un paquet de cartes dont les hauteurs sont quelconques. Cela revient à étudier des paquets de cartes avec répétitions (chaque carte étant répétée quatre fois par exemple). Bien sûr, les cartes répétées facilitent les bons mélanges.

Que devient la règle des 7 (ou 12) mélanges américains pour un paquet avec répétitions de 52 cartes ? En 2006, Mark Conger et Divakar Viswanath ont étudié le problème : pour 52 cartes dont seules les hauteurs ont de l'importance, ils concluent qu'en opérant cinq fois le mélange américain, on aura une assurance de bon mélange comparable à celle donnée par sept mélanges dans le cas où hauteurs et couleurs comptent. Pour un niveau d'exigence fort, les 12 mélanges américains nécessaires pour un paquet de 52 cartes quelconques deviennent 9.

(3) Ordre des cartes dans une main. Un autre point longtemps négligé est maintenant assez bien maîtrisé. Quand le jeu est distribué, chaque joueur ramasse ses cartes et, pour la plupart des jeux, l'ordre des cartes d'un joueur n'a pas d'importance. Seul leur ensemble (sans ordre) détermine si la main du joueur est bonne ou mauvaise. D'ailleurs, un joueur est autorisé à reclasser ses cartes dans sa main (sauf pour certains jeux, comme la bataille). Ce qui importe vraiment pour qu'un mélange soit satisfaisant n'est donc pas que le paquet de cartes avant d'être distribué soit dans l'un des n ! ordres possibles avec une probabilité équivalente pour chaque ordre, mais qu'une fois les cartes distribuées, les quatre ensembles de 13 cartes (pour le jeu de bridge) soient comme si, au départ, le paquet était bien mélangé. On peut économiser deux mélanges américains grâce à cette remarque. Aussi, le nombre nécessaire d'applications du mélange américain pour que le paquet soit dans un état satisfaisant pour des joueurs de bridge est inférieur à 7, pour l'exigence faible, et inférieur à 12 pour l'exigence forte.

(4) Méthode de distribution. Un dernier point est la distribution d'un paquet mélangé. La méthode habituelle consiste à donner les cartes une à une. Cette opération diminue le risque d'une distribution inéquitable et rend la tricherie plus difficile. La distribution qui consisterait à donner les 13 premières cartes au premier joueur, les 13 suivantes au deuxième, etc., serait pourtant aussi bonne si l'on était certain que le jeu est mélangé de manière idéale. Si s est le nombre de cartes distribuées à chaque joueur, Márton Balázs et Dávid Szabó ont démontré récemment qu'utiliser la distribution cyclique (plutôt que la distribution : s cartes au premier joueur, s cartes au deuxième, etc.) équivaut approximativement à effectuer $\log_2(s)$ mélanges américains.

Quatre mélanges américains au bridge

Dans le cas du jeu de bridge, les sept mélanges américains nécessaires à un désordre convenable pour les 52 cartes se réduisent donc à quatre. Deux mélanges sont économisés du fait de la prise en compte du point (3) (l'ordre des cartes d'une main est sans importance) et un autre au moins du fait du mode de distribution cyclique. Les 12 mélanges nécessaires pour un désordre donnant une assurance parfaite se réduisent de même à 9 ou moins.

Depuis plus d'un siècle que l'on cherche à comprendre comment il faut s'y prendre pour mélanger et distribuer les cartes avant de faire une partie de bridge, de poker ou de belote, on a percé quelques mystères et élaboré de beaux résultats. Mais soyons certains que d'autres pépites sont restées cachées et attendent que l'œil puissant du théoricien les découvre. ■

L'AUTEUR

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Balázs et D. Szabó, **Comparing dealing methods with repeating cards**, 2012 (*http://arxiv.org/pdf/1208.0695.pdf*)

P. Diaconis *et al.*, **Analysis of the casino shelf shuffling machines**, *Technical Report n° 2011-08*, Department of Statistics, Stanford University, *août 2011*.

S. Assaf *et al.*, **A rule of thumb for riffle shuffle**, *Ann. Appl. Probab.*, vol. 21(3), pp. 843-875, 2011.

A. Lachal, **Quelques mélanges parfaits de cartes**, *Quadrature*, n° 76, pp. 13-25, 2010.

P. Diaconis et R. Graham, **The solutions to Elmsley's problem**, *Math Horizons*, vol. 14(3), février 2007.

B. Mann, **How many times should you shuffle a deck of cards**, dans *Topics in Contemporary Probability and its Applications* (éd. J. L. Snell), pp. 261-289, CRC Press, 1995.

D. Bayer et P. Diaconis, **Trailing the dovetail shuffle to its lair**, *The Annals of Applied Probability*, vol. (2)2, pp. 294-313, 1992.