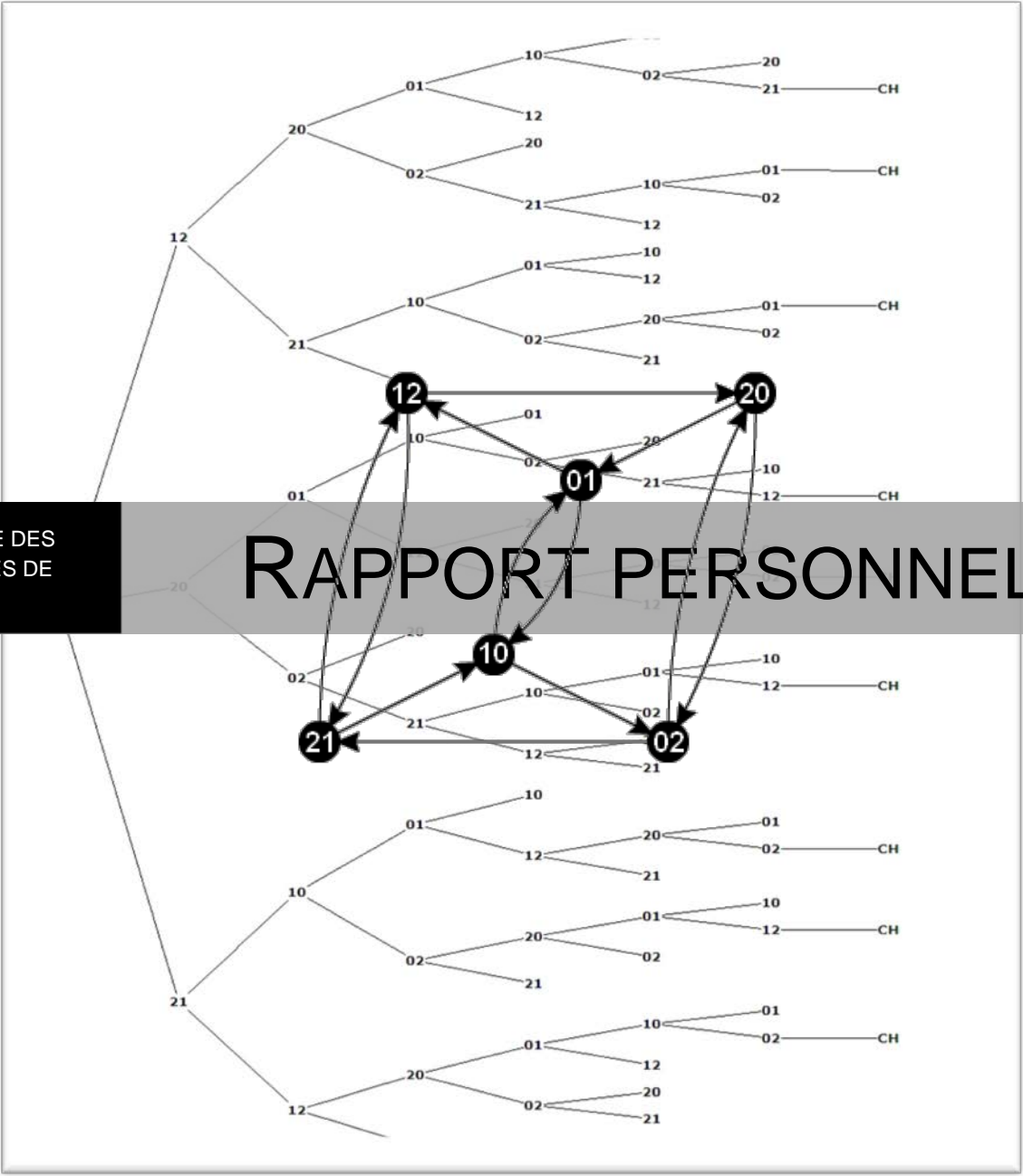


FACULTE DES  
SCIENCES DE  
LUMINY

# RAPPORT PERSONNEL



## Table des matières

Reprise du travail .....	2
Bilan d'expérience .....	7
Sortie du 4 Avril 2012 : Hyppocampe .....	8
Premier sujet : Des graphes et des chemins.....	8
Deuxième sujet : Les cycles et chaines eulériens.....	9
Troisième sujet : Les graphes planaires .....	9
Quatrième sujet : Application de la théorie des graphes.....	10
Cinquième sujet : La coloration des graphes .....	11
Défis :.....	12
1. Montrer que $h^2=cx$ dans le triangle .....	12
2. Défis n°12 –Des traits et c'est tout.....	12
3. Défis n°14 –Tourne-dominos .....	13
4. Défi n°15-Devine-surface .....	14
5. Défi n°16- .....	15

## Reprise du travail

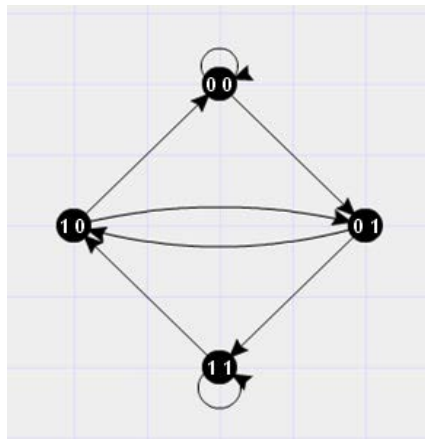
Même si cette méthode a été trouvée en groupe, je vais parler plus particulièrement de la méthode des graphes et arbres.

Cette méthode est utilisée pour des petites bases car elle devient vite lourde à utiliser.

Dans toute l'explication, je prends comme exemple la base 2 à 2 chiffres. En effet, elle est facile à expliquer et donc à comprendre car il n'y a pas beaucoup de codes : 00, 01, 10, 11 ce qui entraîne un graphe et un arbre assez simples.

Tout d'abord, on crée un graphe orienté pour pouvoir voir l'ordre possible des codes. Pour cela, les codes sont les sommets et une arête part d'un code A et va vers un code B. Le code B s'obtient de A par les transformations suivantes : on décale les chiffres de A vers la gauche, on ajoute 0 ou 1 en base 2 (ou 0 ou 1 ou 2 en base 3) à la fin puis on supprime le premier chiffre, par exemple une arête va de 00 à 01 et 00.

On a ainsi le graphe suivant :



Dans ce graphe, on doit trouver un circuit hamiltonien car il faut passer une fois et une seule par chaque sommet pour éviter les répétitions inutiles des codes.

Nous avons ainsi le théorème suivant :

***On cherche obligatoirement un circuit et non un chemin hamiltonien.***

Démonstration de ce théorème :

*On a un chemin hamiltonien qui contient tous les codes et qui se termine par n'importe quel code. Si dans ce chemin, on part du second code, le dernier code<sup>2</sup> doit obligatoirement être relié au premier sinon on n'aurait plus de chemin hamiltonien qui commence par le deuxième terme. Ainsi, on a obligatoirement un circuit hamiltonien.*

Pour trouver ces circuits, on utilise les arbres. Dans l'arbre, si une branche contient tous les sommets alors cette branche est un circuit hamiltonien.

Pour faire les arbres, j'ai toujours suivi la même méthode, seul le nombre de possibilités pour les bifurcations change : 2 pour la base 2 et 3 pour la base 3.

La méthode est la suivante :

- Je prends un départ, par exemple 00.
- Le code qui le suit a une arête qui part de 00 et arrive sur lui, j'ai donc 00 et 01.
- Dans les deux codes que j'ai 00 et 01, je vérifie qu'ils ne sont pas apparus avant dans la branche.
- 00 est déjà là donc j'arrête cette branche.
- 01 apparaît pour la première fois donc je continue la branche.
- A ce moment-là, j'ai  $00 \rightarrow 01$ .
- Après relié à 01, j'ai 10 et 11.
- Aucuns des deux n'est dans la branche.
- Cette dernière se dédouble donc, une vers 10 et l'autre vers 11.
- J'ai donc  $00 \rightarrow 01 \rightarrow 10$  et  $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11$ .
- Je vais d'abord m'occuper de la première.
- Relié à 10, j'ai 01 et 00.
- Les codes sont déjà dans la branche.
- Cette branche ne donne donc pas de circuit hamiltonien.
- Dans la seconde branche, relié à 11, j'ai 10 et 11. Seul 10 n'est pas dans la branche.
- J'ai donc  $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$ .
- Dans cette branche, les quatre codes sont présents, elle est donc bien définie.

De plus, on constate que 10 a une arête vers 00, on a donc bien un circuit hamiltonien.

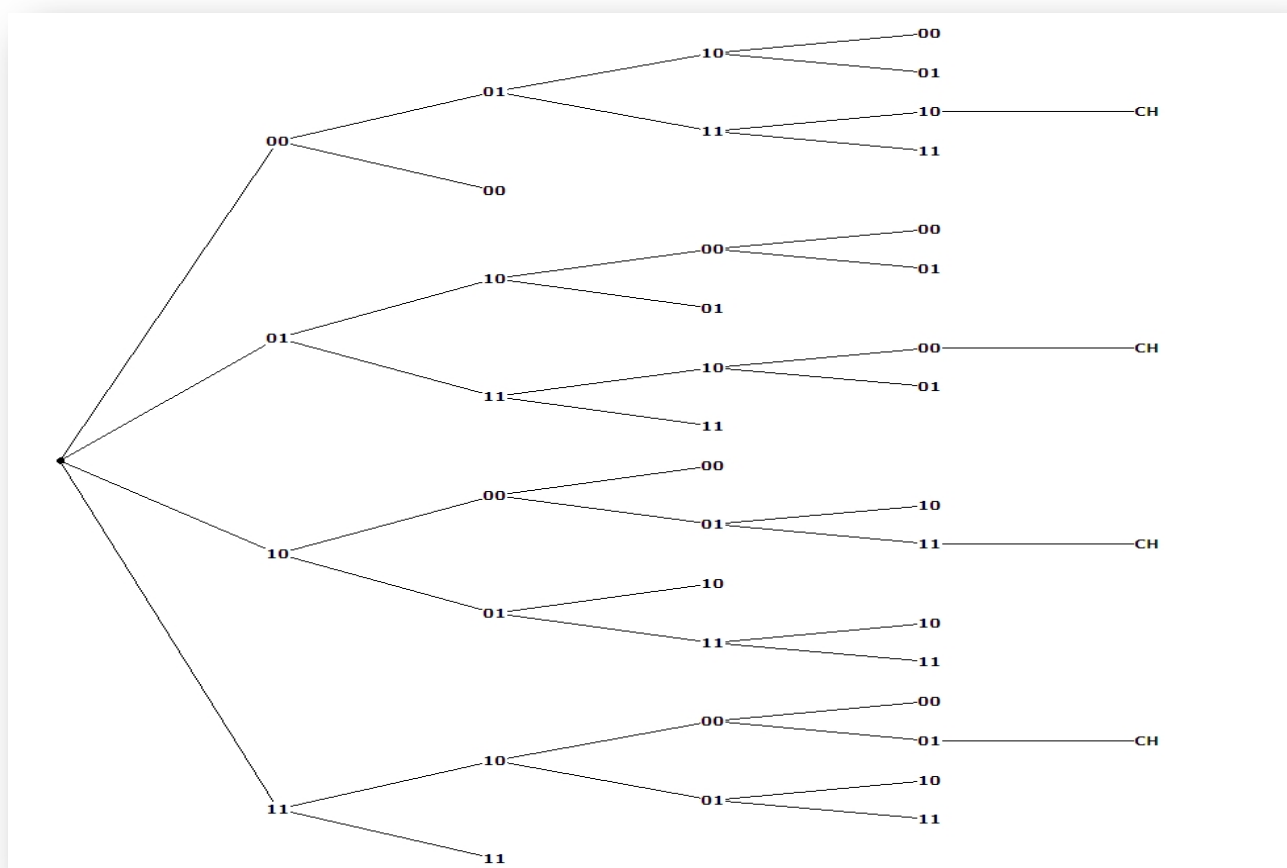
Par conséquent, pour le départ 00, on a un unique circuit hamiltonien :

$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow \dots$

De même, j'ai les circuits hamiltoniens avec le départ

- 01 :  $10 \rightarrow 00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow \dots$
- 10 :  $01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00 \rightarrow \dots$
- 11 :  $11 \rightarrow 10 \rightarrow 00 \rightarrow 01 \rightarrow \dots$

J'obtiens donc l'arbre suivant :



Mais nous pouvons trouver le nombre total de circuits hamiltoniens du graphe sachant le nombre de circuits hamiltoniens partant d'un code choisi avec la propriété suivante :

***Soit  $n$  le nombre de codes.***

***Soit  $h$  le nombre de circuits hamiltoniens pour un départ/code choisi.***

***Alors le nombre total de circuits hamiltoniens dans le graphe s'obtient par la formule :***

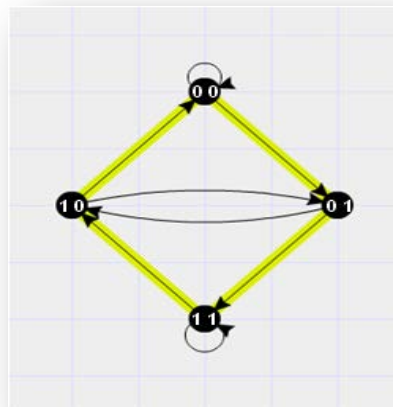
$$\text{nombre de circuits hamiltoniens} = n \times h$$

Démonstration de cette propriété :

*Pour chaque circuits hamiltoniens, il y a  $n$  départs possibles. On a donc que le nombre total de circuits hamiltoniens est  $\times h$  .*

De ce fait, on a en tout  $1 \times 4 = 4$  circuits hamiltoniens, ce qu'on a trouvé précédemment.

Ayant un circuit hamiltonien, nous l'avons mis sur le graphe suivant :



Nous avons ainsi les combinaisons suivantes :

00110      -      10011      -      01100      -      11001

Elles sont toutes de longueur 5.

Je vais également parler de la maquette car c'est un bon moyen de montrer un circuit hamiltonien.

Nous avons choisi de faire la maquette du graphe de la base 3 à 2 chiffres car ce n'est plus dans le plan et le nombre de sommets c'est-à-dire 9 est encore raisonnable.

Des boules en polystyrène représenteront les sommets et Des baguettes en bois les arêtes.

J'ai choisi ces matériaux, car le polystyrène est facile à manipuler et c'est plus simple pour faire les trous pour mettre les baguettes de bois. De plus, c'est léger. Quant au bois, c'est un matériau assez solide et pas trop lourd.

Le plus difficile a été de faire le bon angle pour les arêtes, c'est pourquoi j'ai demandé l'aide de mon père.

On a choisi deux couleurs pour les arêtes : noir et jaune. Le jaune représentera les arêtes qui font parti d'un des circuits hamiltoniens. Le noir a été choisi pour faire ressortir le circuit hamiltonien.

## Bilan d'expérience

Le premier cours, nous avons la liste de tous les sujets, des sujets assez variés et originaux. J'ai choisi le digicode parce que c'est un outil de tous les jours qui devient omniprésent dans notre environnement. De plus, on peut relier le problème du digicode à d'autre problème comme les numéros de carte bancaire ou le mélange de cartes dans un ordre prédéterminé.

Le fait que les cours se déroulaient de 15 heure à 19 heure était assez dur pour travailler la dernière heure alors qu'on commençait notre journée à 8 heure. La journée était donc assez éprouvante. Le cours était séparé en coupé en deux : d'une part le cours proprement dit et le TD. Le cours proprement dit contenait des conférences, des stages hyppocampe et des présentations réalisée par M. Beddou. Ces diverses activités étaient assez variées et intéressantes. On a pu avoir une présentation sur l'infini et un hyppocampe sur les graphes pour ne citer que quelques exemples.

Par ailleurs, trouver des mathématiques dans un digicode s'est révélé très intéressant et même surprenant. En effet, je ne pensé pas qu'on pouvait trouver autant de ce domaine dans ce petit instrument.

La matière proprement dit, la recherche sur un tel sujet essentiellement est assez formatrice. Puisqu'on a une expérience du travail de groupe qui n'est pas toujours facile. Mais j'ai eu de la chance de tomber dans un groupe avec une bonne entente, coordination et complémentarité dans les domaines.

J'ai été avec deux autres personnes en deuxième licence de mathématiques comme moi, on a donc pu facilement travailler en dehors des heures de maths en jeans.



## Sortie du 4 Avril 2012 : Hyppocampe

### Premier sujet : Des graphes et des chemins

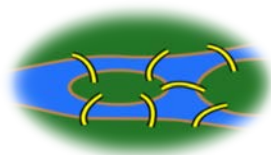
Tout d'abord, nous avons plusieurs définitions :

- Un *graphe est connexe* s'il existe un chemin entre tout couple de sommets.
- Le *degré entrant*  $d^+(x)$  est le nombre d'arcs vers le sommet  $x$  tandis que le *degré sortant*  $d^-(x)$  est le nombre d'arcs sortant de  $x$ . Le *degré du sommet*  $x$  est la somme de  $d^+(x)$  et  $d^-(x)$ .
- Un *cycle eulérien* est un chemin qui passe par toutes les arêtes exactement une fois et où les sommets de départ et d'arrivées sont les mêmes.

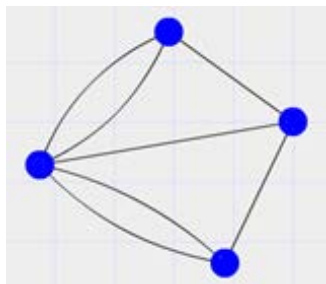
Nous avons également le *Théorème d'Euler* :

Si un graphe connexe possède un chemin eulérien alors il possède au maximum deux sommets de degré impair.

Grace à tous ces éléments, l'élève essaye de résoudre le problème de Königsberg. Ce problème consiste à visiter la ville entière en traversant une seule fois chaque pont.



On cherche donc le chemin le plus court et eulérien sur un graphe orienté :



L'élève a donné plusieurs algorithmes :

- Le premier consiste à énumérer tous les chemins  
Ceci se révèle inefficace.
- Le deuxième consiste pour  $k$  de 1 à  $n$ , à chercher des chemins de taille  $k$ .
- La troisième est de trouver le plus court chemin pour aller à chaque sommet

## Deuxième sujet : Les cycles et chaînes euliérens

Nous avons le problème des 7 ponts (voir dessin ci-dessus, c'est le même problème).

Dans le graphe même que précédemment, l'objectif est toujours de chercher un cycle eulérien.

Or avec le *théorème d'Euler*, il n'y a pas de cycle eulérien

La modélisation de la ville et ses ponts par un graphe et la recherche d'un cycle hamiltonien ne donne donc rien pour ce problème.

## Troisième sujet : Les graphes planaires

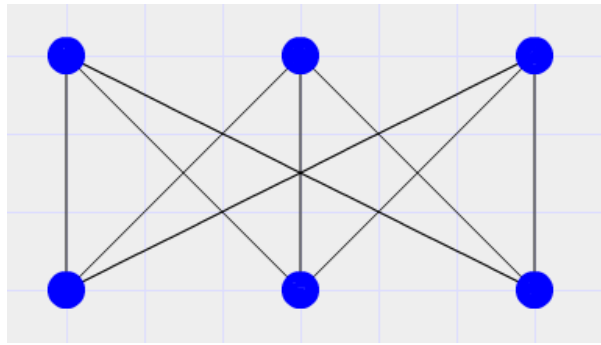
Nous avons plusieurs définitions :

- Un *graphe est planaire* si on peut le dessiner dans un plan sans croiser deux arêtes.
- Un *cycle* est une chaîne dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes. Autrement dit, soit un chemin dont les arêtes sont  $E = \{s_0s_1, \dots, s_{k-2}s_{k-1}\}$  : le cycle est alors défini par  $E \cup \{s_{k-1}s_k\}$ .
- Le *degré*  $d_G(r)$  d'une région  $r$  de  $G$  est le nombre d'arêtes frontières de  $r$  plus deux fois le nombre d'arêtes internes de  $r$ .
- Un *graphe est connexe* s'il existe un chemin entre tout couple de sommets.
- Un *arbre couvrant d'un graphe non orienté et connexe* est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe.

Nous avons encore le *théorème d'Euler* cité précédemment.

Ici, nous avons la résolution du problème des 3 maisons. Ce problème comprend trois maisons que l'on veut relier à l'eau, l'électricité et le gaz sans croiser les tuyaux de chaque maisons et domaine.

On doit donc voir si le graphe qui a pour sommets : les trois maisons, la prise d'eau, celle d'électricité et celle de gaz et les arêtes sont les tuyaux est planaire.



En faisant le graphe, on constate vite que le graphe n'est pas planaire. Donc c'est impossible de relier les maisons comme on voulait au début.

Pour montrer si un graphe est planaire ou non, il faut utiliser la *relation d'Euler*.

Notons  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces.

Avec ces notations, la relation d'Euler est :

$$2A \geq 3F \text{ et } A \leq -6 + 3S$$

Or, pour le graphe,  $2A \geq 4F$  car pas de faces à trois arêtes

$$\text{Et donc } A \leq -4 + 2S$$

Le graphe n'est donc bien pas planaire. Le problème des trois n'a pas de solution.

#### Quatrième sujet : Application de la théorie des graphes

Un *graphe probabiliste* est un graphe orienté et pondéré tel que la somme des pondérations des arêtes partant de chaque sommet soit égale à 1.

Grace à ces graphes, la modélisation de l'évolution d'un virus est possible.

Nous avons les définitions :

- Un *graphe* est un ensemble de points, dont certaines paires sont directement reliées par un (ou plusieurs) lien(s).
- Un *cycle eulérien* est un chemin qui passe par toutes les arêtes exactement une fois et où les sommets de départ et d'arrivées sont les mêmes.
- Dans un *graphe complet* chaque sommet est relié à tous les autres.
- Un *graphe est planaire* si on peut le dessiner dans un plan sans croiser deux arêtes.

## Cinquième sujet : La coloration des graphes

Nous avons le théorème des quatre couleurs :

On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Puis, celui des six couleurs :

On peut colorer les sommets d'un graphe planaire (sans boucles) en utilisant au plus six couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Le théorème des quatre couleurs est trop dur à démontrer. Donc l'élève a démontré une partie du théorème des six couleurs.

Démonstration du théorème des six couleurs :

*On raisonne par récurrence sur le nombre  $n$  de sommets.*

*Le résultat est évident si  $n = 6$ .*

*Supposons le vrai pour  $n$  et soit  $G$  un graphe planaire à  $n+1$  sommets.*

*Le degré de l'un d'eux n'excède pas 5.*

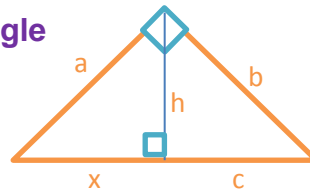
*Colorions avec au plus six couleurs le graphe obtenu en supprimant ce sommet.*

*Il suffit de voir que l'on peut maintenant le colorier aussi.*

*Or, les sommets avoisinants utilisant au maximum cinq couleurs, il est possible de colorier le dernier sommet en utilisant la sixième.*

## Défis :

### 1. Montrer que $h^2=cx$ dans le triangle



Démonstration : on a  $\begin{cases} a^2 + b^2 = (c + x)^2 \\ x^2 + h^2 = a^2 \\ c^2 + h^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + 2cx + x^2 \\ x^2 + h^2 = a^2 \\ c^2 + h^2 = b^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow c^2 + h^2 + x^2 + h^2 = c^2 + 2cx + x^2 \Leftrightarrow 2h^2 = 2cx \Leftrightarrow \boxed{h^2 = cx}.$$

### 2. Défis n°12 –Des traits et c'est tout

Pour répondre à ce problème, il suffit de faire le tableau de tout les nombres jusqu'à ce qu'on ait 312 traits.

Número écrit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Symboles		└	┐	 	 └	 ┐	└ 	└ └	└ ┐	┐ 	┐ └	┐ ┐	   	 └ 	 ┐ 
Nombre de traits par symbole	1	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	3	4	5
Nombre de traits au fur et à mesure de l'écriture des chiffres	1	3	6	8	11	15	18	22	27	31	36	42	45	49	54

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
 └ 	 └ └	 └ ┐	 ┐ 	 ┐ └	 ┐ ┐	└   	└   └	└   ┐	└ └ 	└ └ └	└ └ ┐	└ ┐ 	└ ┐ └	└ ┐ ┐	┐   	┐   └	┐   ┐	┐ └ 	┐ └ └
4	5	6	5	6	7	4	5	6	5	6	7	6	7	8	5	6	7	6	7
58	63	69	74	80	87	91	96	102	107	113	120	126	133	141	146	152	159	165	172

36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌	┌
└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└	└
┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐	┐
8	7	8	9	4	5	6	5	6	7	6	7	8	5	6	7	6	7	8	7
180	187	195	204	208	213	219	224	230	237	243	250	258	263	269	276	282	289	297	304

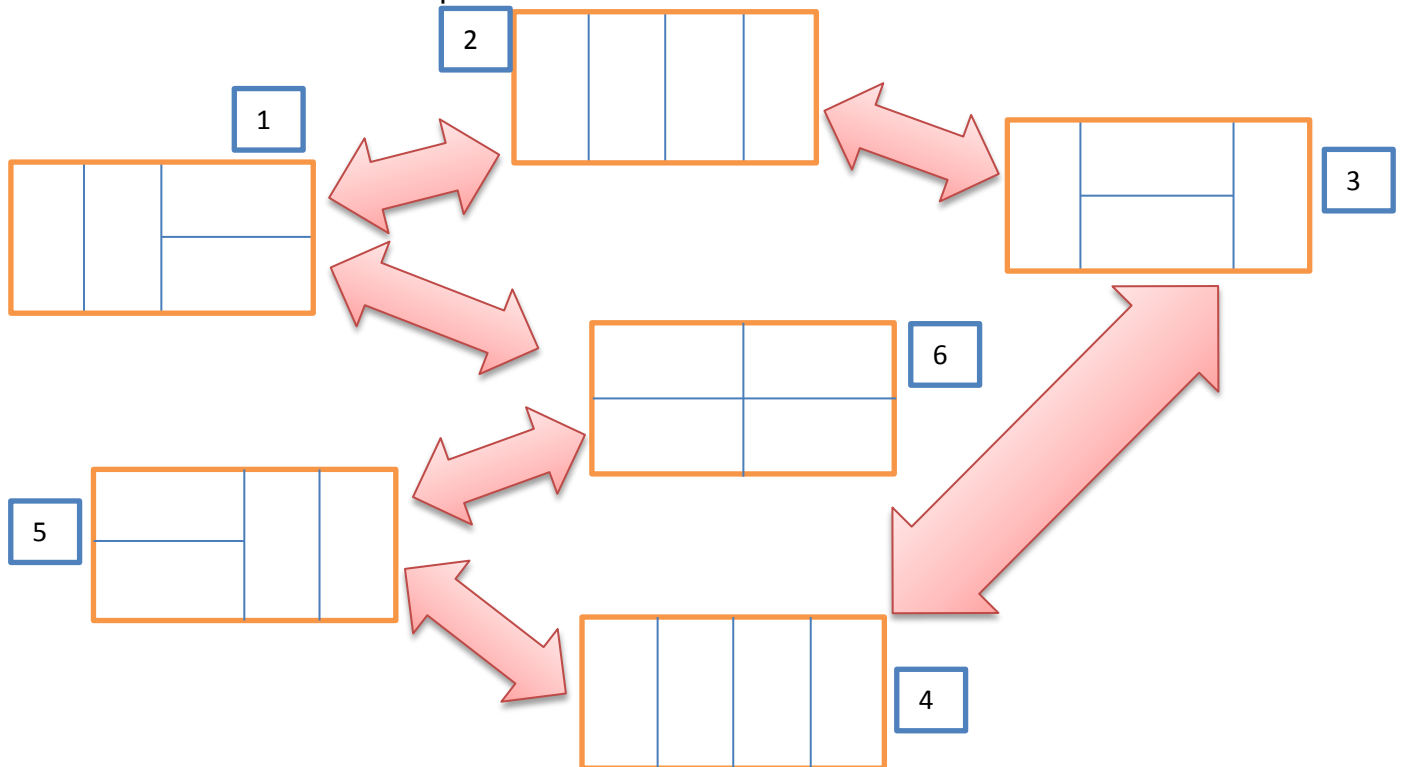
56
┌
└
┐
┐
8
312

Ainsi, Charles a écrit 56 en dernier avant que son stylo n'est plus d'encre.

### 3. Défis n°14 –Tourne-dominos

Vu qu'on a un carré, on peut séparer le carré en deux car il y a une symétrie. Et le nombre maximal sera le double du nombre trouvé pour le haut.

Nous avons tous les cas possibles dans le schéma suivant :

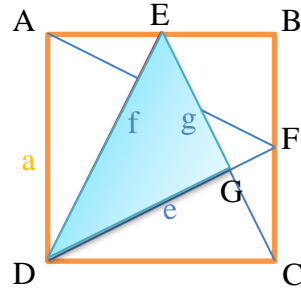


Nous voyons qu'au plus 5 coups pour passer de la configuration 1 à la 6.

Ainsi, il y a 10 coups au maximum, 5 pour le haut et 5 pour le bas.

#### 4. Défi n°15-Devine-surface

Nous avons la figure suivante :



Légende :

- Les petites lettres correspondent aux longueurs.
- Les grandes lettres aux points d'intersections.

Les triangles AED et GCD sont semblables.

Donc

$$\frac{AED}{GCD} \Leftrightarrow \frac{f}{a} = \frac{a}{f-g} = \frac{\frac{a}{2}}{f-g}$$

La dernière équation se trouve car EDC est isocèle en E.

Avec cette relation, on trouve

$$a^2 = fe = 2(f-g)(0) \Leftrightarrow \boxed{e = 2(f-g)} \quad (1)$$

Les triangles AED et GFC sont également semblables.

Donc

$$\frac{AED}{GFC} \Leftrightarrow \frac{f}{a_2} = \frac{a}{f-g} = \frac{\frac{a}{2}}{f-e}$$

Avec cette relation, on trouve :

$$a^2 = 2f(f-g) = 4f(f-e) \Leftrightarrow \boxed{f-g = 2(f-e)} \quad (2)$$

En remplaçant e trouvé des (1) dans (2), on a alors :

$$f-g = 2(f-2(f-g)) \Leftrightarrow f-g = 2f-4f+4g \Leftrightarrow \boxed{3f=5g} \quad (3)$$

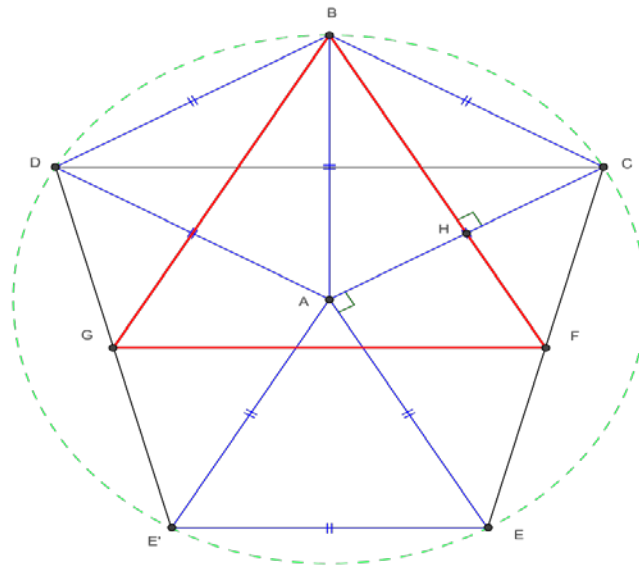
Comme 3 et 5 sont premiers entre eux,  $\exists k \in \mathbb{N} : f = 5k \text{ et } g = 3k$

Ainsi, avec (0), on a  $a^2 = 2 \times (5k)(5k - 3k) = \boxed{20k = a^2}$

Or, on veut la plus petite surface. On prend donc  $k = 1$ .

Et donc la surface minimale du carré est  $20 \text{ cm}^2$ .

## 5. Défi n°16-



On a, au niveau des angles en A,  $60 + 60 + X + 60 + X = 360 \Leftrightarrow \boxed{X = 90^\circ}$

Car les triangles ABD, ABC et AE'E sont isocèles et les triangles ADE' et ACE sont semblables avec la symétrie de la figure.

Les triangles ADE' et ACE sont donc rectangles.

Les droites BH (hauteur du triangle ABC) et AE étant perpendiculaires à la même droite AC, elles sont parallèles.

Or, BH est aussi la médiane (ABC isocèle).

Dans le triangle ACE, la droite BH est parallèle à un côté et passe par le milieu d'un autre. Elle passe donc forcément par le milieu du dernier côté c'est-à-dire F.

Donc le triangle BFG a l'angle B qui vaut  $60^\circ$  par la construction. Comme il est isocèle par symétrie de la figure, il est équilatéral.



Le segment CD étant des hauteurs des triangles ABC et ABD équilatéraux de coté 25 cm, il vaut  $CD = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 25 = 25\sqrt{3}$  cm.

De plus, E'E vaut 25 cm par construction.

Or, FG est la moyenne de CD et E'E.

D'où,  $FG = \frac{25}{2}(\sqrt{3} + 1)$  cm.

Ainsi, l'aire de la visière vaut  $\frac{\sqrt{3}}{2}EF^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{25}{2}(\sqrt{3} + 1)\right)^2 = \boxed{505 \text{ cm}^2 = \text{Aire}}$ .