ELBAZ Dan BOUKRYATA Abdelghafour

MATH EN JEANS
SUJET DE RECHERCHE CHOISI :
LA TOUR INFERNALE

CAHIER COMMUN DE RECHERCHE

Année 2011/2012 Semestre 4.

SOMMAIRE

ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Nous avons choisis notre thème de recherche sur la tour infernale.
Voici les règles de bases de ce jeu :

Ce jeu se joue à deux joueurs. Il se joue avec des pavés en bois tous identiques, de même poids et de même taille.
Nous appellerons ces planchettes de bois des « kaplas » tout au long du cahier de recherche commun.
Avant de jouer, on aura au préalable fabriqué la tour. Il n'y a pas de nombre d'étages maximum et ses étages seront tous identiques, remplis de trois, quatre, cinq kaplas ou plus.
Les deux joueurs jouent successivement chacun leur tour. Et le but du jeu est qu'à chaque tour un joueur doit enlever un kapla sans faire tomber la tour.

Lors de la première séance, en prenant connaissance avec le sujet et ses règles nous nous sommes posés un tas de questions. Mais les questions auxquelles nous voulions absolument répondre étaient :

> « Peut-on gagner à tous les coups ? »
>
> « Si oui, comment ? »
>
> « Existe t-il un algorithme infaillible ? »

Ensuite, toujours au cours de la première séance, après avoir fixé notre problématique de début de recherche nous nous sommes posés d'autres questions :

> « Comment traduire mathématiquement ce problème ? Comment passer de petites planchettes de bois à des mathématiques ? »
>
> « Quel outil mathématique que nous maitrisons pourrait-être le plus adapté pour nous aider dans nos recherches? »
>
> « Y a t-il des différences avec un nombre limité de kaplas et un nombre illimité ? »
>
> « Le nombre d'étages est-il important ? »
>
> « Vaudrait t-il mieux être premier à commencer ou deuxième »
>
> « Comment commencer les recherches ? »

COMMENCEMENT DES RECHERCHES DE FACON NAIVE

Au début des recherches, nous avons commencé à « jouer » à la tour infernale pour nous imprégner du jeu, sans même noter quoi que ce soit.
Ensuite, nous avons commencé à marquer tout ce que nous faisions, à chaque tour.
C'est à dire, nous regardions : celui qui était premier et donc celui qui était second, celui qui gagnait, chaque coup que l'on faisait, …
Bien sûr, nous avons commencé avec le cas le plus simple, avec un toit à 3 kaplas.

Dans une tour avec un toit à trois kaplas il y a deux kaplas sur le coté, aux extrémités et un seul au milieu. Nous décidions donc de noté Ci les cotés et Mi les milieux (où i est le nombre de fois qu'à joué le joueur).
Nous avions donc des suites comme par exemple :

Joueur 1	Joueur 2
C1	M1
C2	C2
M3	C3
M4	PERDU

Après, nous avons voulu d'abord explorer tous les cas simples, en espérant y trouver une logique pour gagner.
Donc nous travaillions sur le cas à deux étages à trois kaplas.
Voilà tous les cas possibles : (cette fois avec i le numéro de l'étage)

J1	J2
C1	C2
C2 (ou C1)	C1 (ou C2)
PERDU	GAGNÉ

J1	J2
M1	C2
C2	.
GAGNÉ	PERDU

J1	J2
C1	C1
M2	.
GAGNÉ	PERDU

J1	J2
C1	M2
C1	;
GAGNÉ	PERDU

J1	J2
M1 (OU M2)	M2 (OU M1)
PERDU	GAGNÉ

La première remarque a été que dans certains cas, en reproduisant ce que le joueur 1 fait le joueur 2 gagne toujours.

Par la suite, nous avons fait la même chose avec le cas à trois étages à trois kaplas. Mais cette fois-ci en reproduisant toujours ce que fait l'autre (appart au premier coup) car nous avions une intuition grâce au cas précédent.

J1	J2
M1	M2
M3	.
GAGNE	PERDU

J1	J2
C1	C2
C3	C3 (ou C1 ou C2)
C2 (ou C1 ou C3)	C1(ou C2 ou C3)
PERDU	GAGNE

J1	J2
C1	C2
M3	C1 (ou C2)
C2 (ou C1)	.
GAGNE	PERDU

J1	J2
C1	M2
M3	C1
.	
PERDU	GAGNE

C1	M2
C3	C1 (ou C3)
C3 (ou C1)	.
GAGNE	PERDU

M1	M2
M3	.
GAGNE	PERDU

M1	M2
C3	C3
.	
PERDU	GAGNE

M1	C2
M3	C2
.	
PERDU	GAGNE

M1	C2
C3	C2 (ou C3)
C3 (ou C2)	.
GAGNE	PERDU

Apres avoir énuméré les cas possibles, quelques intuitions sont venus à notre esprit. Mais, très vite nous avons réalisé qu'il y avait le cas où le nombre d'étage est impair et le cas où le nombre d'étages est pair.

Ensuite, nous avons compris qu'il suffisait de trouver une solution pour le cas où le nombre d'étage est pair.
En effet, dans un cas où le nombre d'étage est impair, il suffit simplement d'enlever le kapla du milieu d'un étage pour se retrouver dans un cas où le nombre d'étage est pair.
Mais, il faut encore trouver l'algorithme qu'il faut et les conditions adéquates pour qu'il marche.

RECHERCHE DE TRADUCTION MATHEMATIQUE

Depuis le début de nos recherches, nous travaillions de façon naturelle et donc sans écrire mathématiquement le problème.
Cet exercice fut très difficile car nous n'avions jamais essayé de traduire mathématiquement un problème comme cela.

Premières intuitions:
. Fabriquer des suites logiques.
. Utiliser un repère
. Transformé la tour en une matrice

Nous avons essayé les trois mais la seule bonne intuition a été de transformer la tour en une matrice.

Pour le cas à trois kaplas, nous avons automatiquement pensait à une matrice avec des 0 et des 1. On marque 0 si la place est vide et 1 sinon.
Donc au début du jeu la tour serait représenté simplement par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et avant de tomber la tour devrait être de cette forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Donc en transcrivant mathématiquement on trouve une règle :

Si au rang n-1, la tour est sous cette forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & \bar{a} & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \bar{a} & a \end{pmatrix}$$

Avec $a \in \{0 ; 1\}$ et $\bar{a}$ son complémentaire

Alors la tour tombe au rang n.

Par la suite, nous avons fait la même chose pour les cas avec des niveaux à 4 et 5 kaplas.

Pour ce faire, il a fallu trouver des matrices avec des coefficients spéciaux pour arriver à en conclure une règle comme la précédente.

Nous avons cherché longtemps la bonne matrice pour arriver à une logique.

Pour un étage à 4 kaplas, nous avons pensé à toutes ces représentations :

1 1 1 1 mais aucune règle n'en découle

2 1 1 2 mais aucune règle n'en découle

2 1 2 1 mais aucune règle n'en découle

1 2 3 4 mais aucune règle n'en découle

1 3 2 4 mais aucune règle n'en découle

Enfin, nous avons trouvé qu'en écrivant l'étage sous la forme (1 1 2 2) une règle comme la précédente apparaissait. En effet, dans tous les cas d'équilibre, la somme de l'étage est égale à trois.

Au début du jeu, la tour serait représenté simplement par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avant de tomber, la tour devra comprendre que des étages comme cela :

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 2)$$

$$(1 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$$

$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 2)$$

$$(0 \quad 1 \quad 2 \quad 0)$$

En découle la règle suivante :

Posons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ comme la représentation de la tour.

Si au rang n-1, sur chaque étage de la tour, la somme des nombres est égale à 3
Alors au rang n la tour tombe.

Pour un étage à 5 kaplas, nous avons pensé à toutes ces représentations :

(1 1 1 1 1) mais aucune règle n'en découle

(3 2 1 2 3) mais aucune règle n'en découle

(1 2 1 2 1) mais aucune règle n'en découle

(1 1 2 1 1) mais aucune règle n'en découle

Enfin, nous avons trouvé qu'en écrivant l'étage sous la forme (1 1 3 2 2) une règle comme la précédente apparaissait. En effet, dans tous les cas d'équilibre, la somme de l'étage est égale à deux.

Au début du jeu, la tour serait représenté simplement par :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Avant de tomber, la tour devra comprendre que des étages comme cela :

$$(0 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0)$$
$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$$
$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2)$$
$$(0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 0)$$

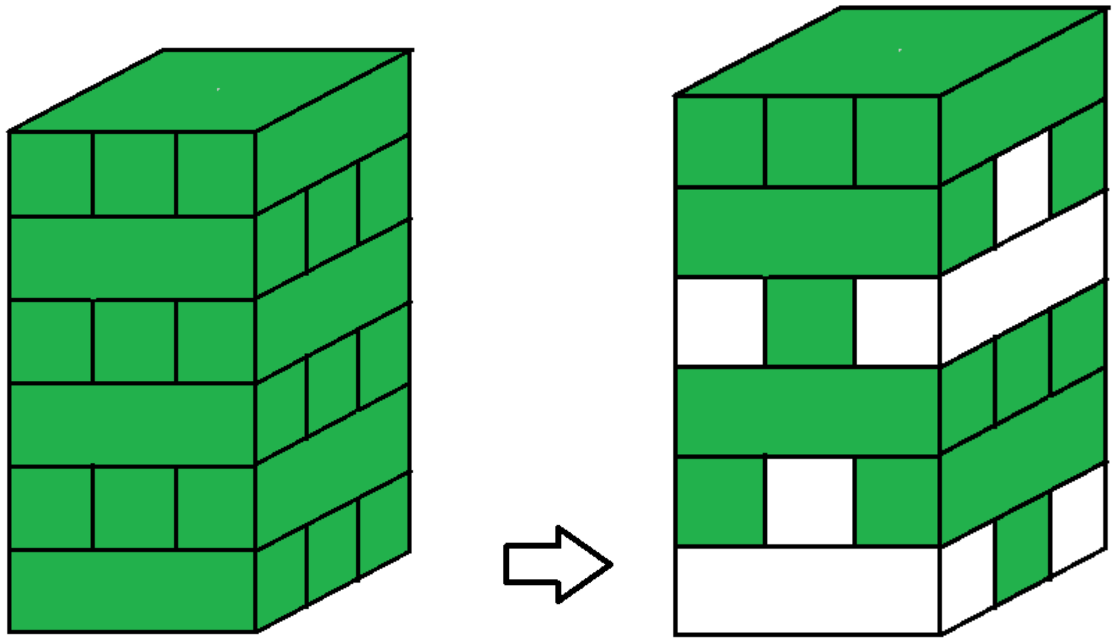
En découle la règle suivante :

Posons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ comme la représentation de la tour.

Si au rang n-1, sur chaque étage de la tour, la somme des nombres est égale à 3
Alors au rang n la tour tombe.

PASSAGE DU RELIEF AU PLANAIRE

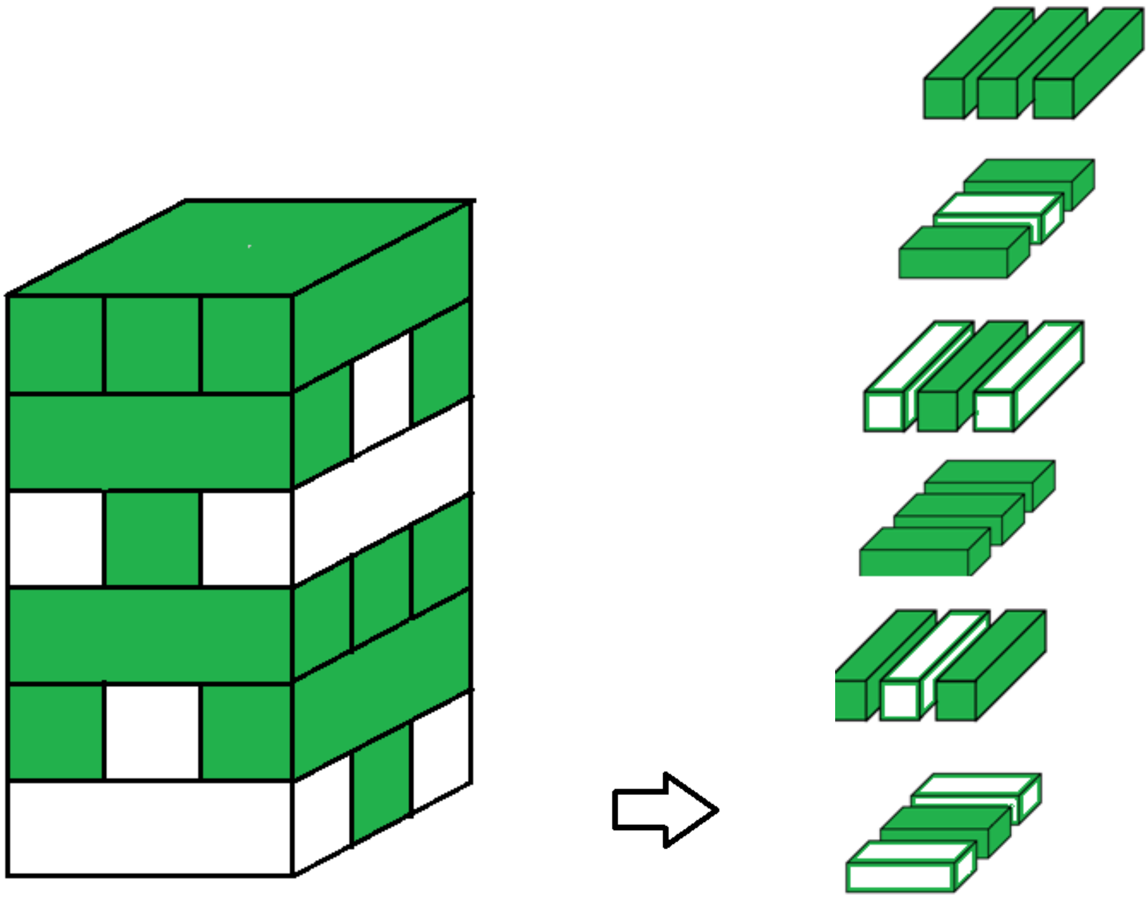
Lors de la découverte du jeu de la tour infernal, nous avons travaillé sur la tour en relief, c'est-à-dire que la tour était debout. On retirait les kaplas un par un sans faire tomber la tour. En théorie on a travaillé de cette manière pour retirer les kaplas (passage de la première à la seconde figure) :



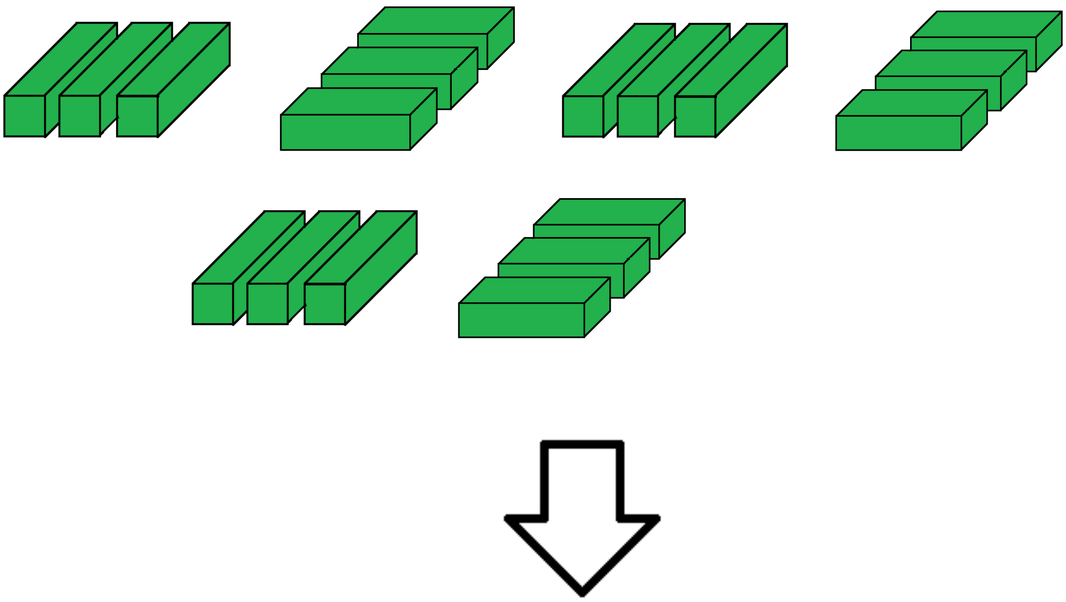
Légende : en vert kaplas présent

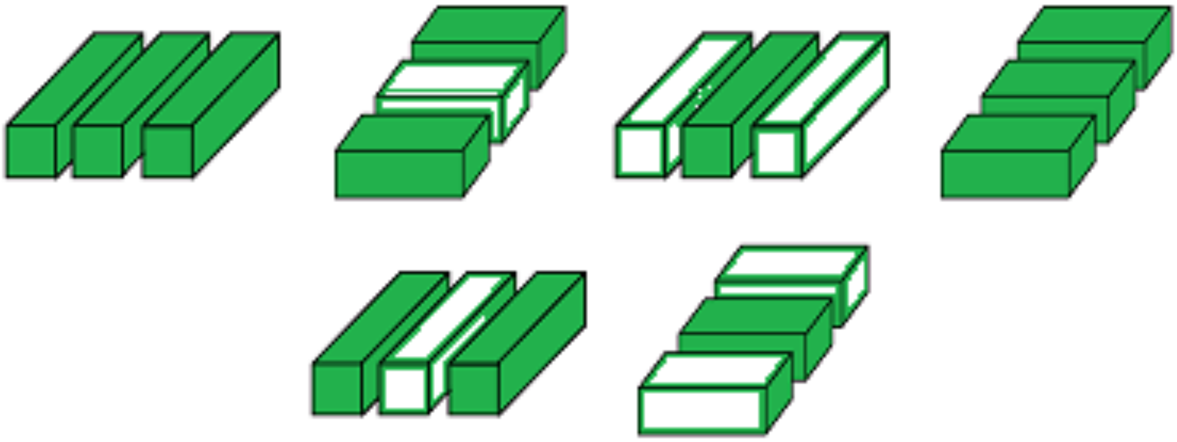
en blanc kaplas absent

Mais la théorie ne s'avère pas très juste car il est très difficile de retirer parfaitement les kaplas sans en bouger d'autres ou sans même faire tomber la tour alors qu'en théorie rien de cela ne devrait se passer. Vu que l'étude de la tour en relief nous posait problème, il fallait trouver une solution adéquate qui nous permettrait d'étudier la tour sans ses inconvénients on a donc regardé niveau par niveau et on a remarqué que l'on pouvait séparer les étages un par un et avoir une vision planaire du sujet :



Et donc le premier mouvement donné en exemple ci-dessus donne cela :





Grace à cette technique qui nous fait passer du relief au planaire le problème est plus facile à étudier. Les réponses aux questions posées nous sont venues plus vite car il nous paraissait plus simple et agréable de travailler comme cela.

Mais cette technique nous coûte cher car malheureusement nous ne pouvons plus juger l'équilibre de la tour, et donc il va falloir calculer la stabilité de la tour et la résolution pure séparément.

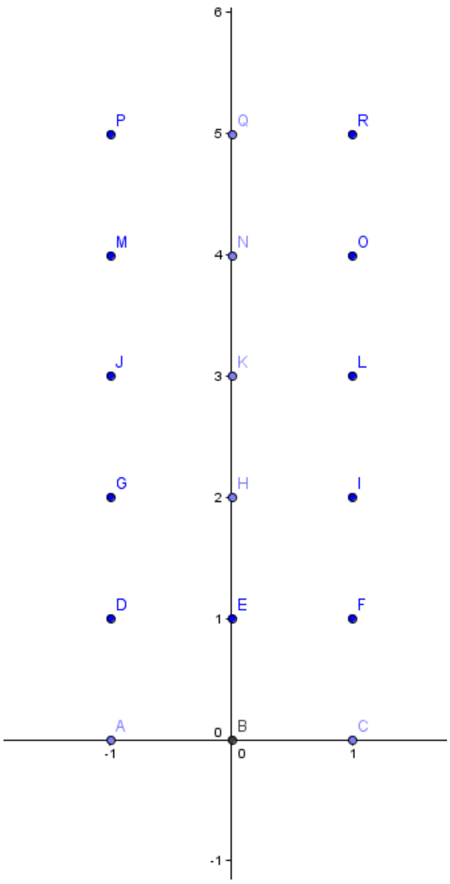
De cela découle les recherches sur l'équilibre de la tour.

ÉQUILIBRE DE LA TOUR

Pendant toutes les recherches nous avons supposé que les kaplas étaient tous de mêmes poids et de même forme.

On sait d'avance que la stabilité de la tour revient à chercher et à calculer la position du barycentre de la tour. Pour cela on remplace chaque kaplas par un point représentant dans un repère orthonormé comme ceci :

On appelle A, B, C, D, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R des représentants des kaplas.



Et à partir de là on peut commencer à calculer les coordonnés du barycentre.

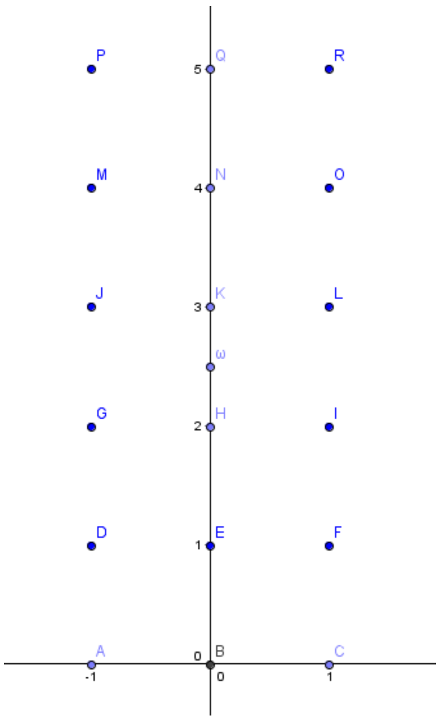
Soit ω le barycentre des points [(A,1)(B,1)(C,1)(D,1)(E,1)(F,1)(G,1)(H,1)(I,1)(J,1)(K,1)(L,1)(M,1)(N,1)(O,1)(P,1)(Q,1)(R,1)]

xω = (xA+xB+xC+xD+xE+xF+xG+xH+xI+xJ+xK+xL+xM+xN+xO+xP+xQ+xR) /(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 0

yω = (yA+yB+yC+yD+yE+yF+yG+yH+yI+yJ+yK+yL+yM+yN+yO+yP+yQ+yR)/

(1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1) = 15/6 = 2,5

Et maintenant on peut placer le point sur le repère

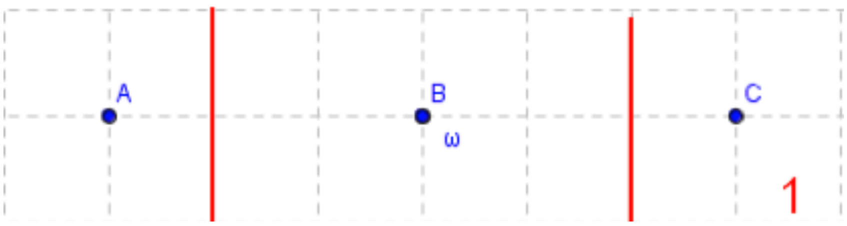


Après de nombreux calculs des coordonnées du barycentre en enlevant plusieurs kaplas on remarque que le barycentre interagi seulement avec les points situés sur et au-dessus de l'étage auquel nous avons retiré le kaplas. De là on remarque que le barycentre doit se situé dans une certaine zone (délimité par un carré) qui permet de maintenir la stabilité du barycentre. Lorsque le barycentre est en dehors de cette zone, la tour tombe à coup sûr.

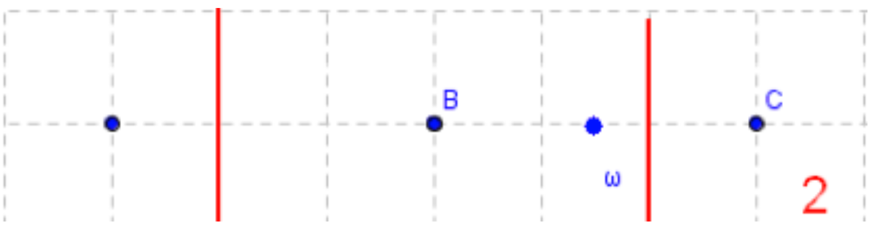
Nous voulions faire encore mieux, nous voulions faire en sorte que le barycentre soit comme précédemment au milieu de la tour (c'est sa meilleure position de stabilité) et avoir retiré un maximum de kaplas. Comme le barycentre est un isobarycentre donc il suffit de calculer les barycentres de chaque étage séparément et ensuite de calculer le barycentre des barycentres pondérés précédemment calculés. A partir de cela, on obtient ce que l'on appellera les positions d'équilibre qui sont les différentes positions des kaplas mais on cherchera les meilleurs étages c'est à dire les étages sur lesquels le barycentre se trouve au milieu.

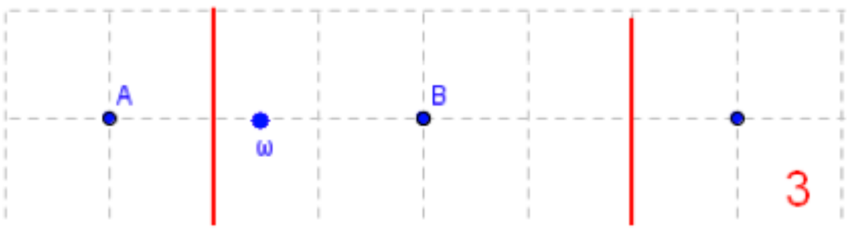
Nous avons tout d'abord cherché la position des différents barycentres pour un étage à 3 kaplas :

On appelle A, B, C des représentants des kaplas et ω le barycentre des points [(A,1) (B,1) (C,1)]

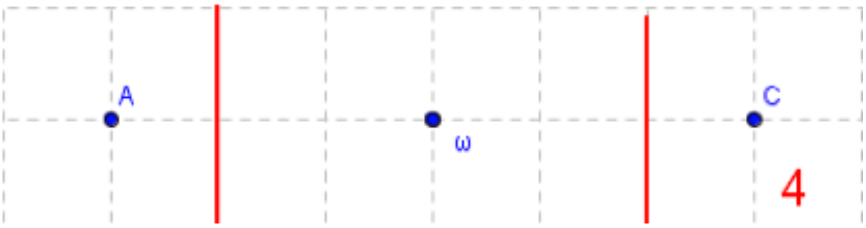


Sur le premier exemple on ne peut pas le considérer comme étant une position d'équilibre car aucun kaplas n'est retiré.

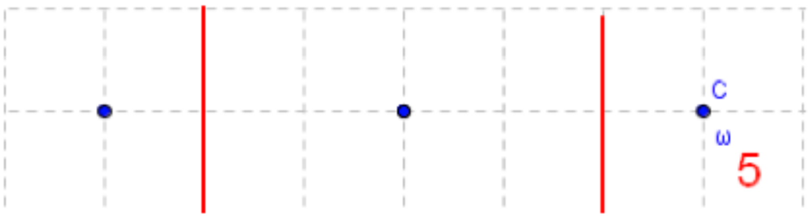


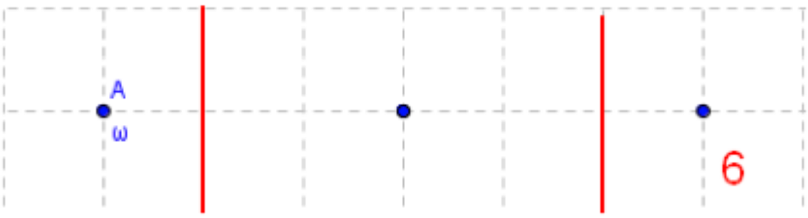


Sur le deuxième exemple et troisième exemple on peut remarquer qu'en enlevant simplement un kapla d'un coté le barycentre reste dans le carré mais ce n'est pas une position parfaite.

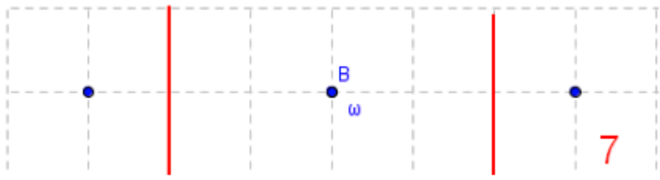


Sur le quatrième exemple on peut remarquer qu'en enlevant simplement un kapla d'un milieu le barycentre reste dans le carré et en plus de cela c'est une position parfaite.





Sur le cinquième et sixième exemple on peut remarquer qu'en enlevant un kapla d'un coté et un kapla du milieu le barycentre sort du carré et donc ce n'est pas une position d'équilibre.



7

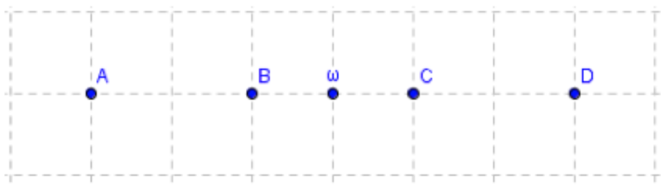
Sur le septième exemple on peut remarquer qu'en enlevant les deux kaplas des cotés le barycentre reste dans le carré et en plus de cela c'est une position parfaite.

En résumé les positions d'équilibres parfaites sont comme les exemples 4 et 7.

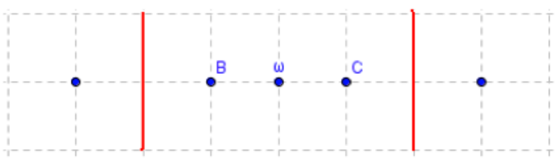
(1,0,1) (0,1,0)]

De la même manière on cherche la position des différents barycentres pour un étage à 4 kaplas :

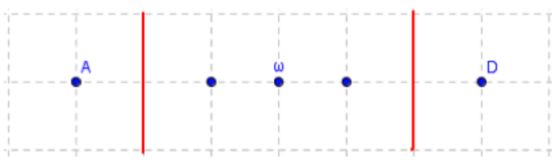
On appelle A, B, C, D des représentants des kaplas et ω le barycentre des points [(A,1) (B,1) (C,1) (D,1)]



On obtient les résultats suivants :



1



2

Sur le premier exemple on a bien qu'en enlevant les deux kaplas des cotés le barycentre reste dans le carré et qu'en plus de cela c'est une position parfaite.

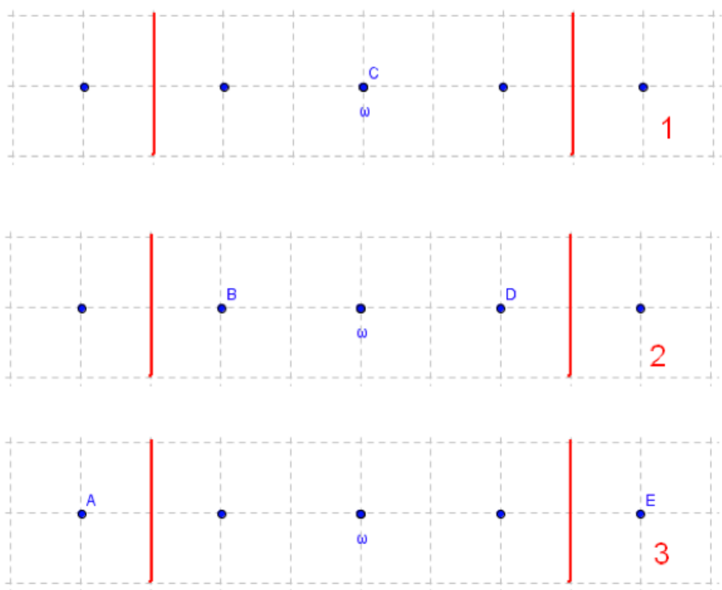
Sur le deuxième exemple on a bien qu'en enlevant les deux kaplas des milieux le barycentre reste dans le carré et qu'en plus de cela c'est une position parfaite.

En résumé les positions d'équilibres parfaites sont comme les exemple 1 et 2

[(1,0,0,1) (0,1,1,0)]

De la même manière on cherche la position des différents barycentres pour un étage à 5 kaplas :

On appelle A, B, C, D, E des représentants des kaplas et ω le barycentre des points [(A,1) (B,1) (C,1) (D,1) (E,1)]



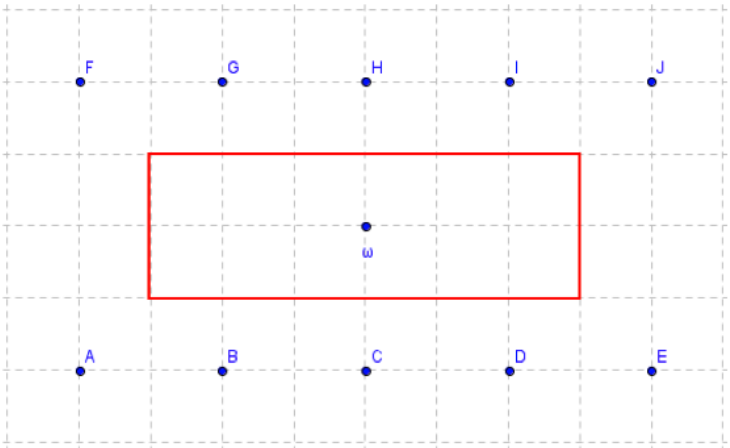
Sur le premier exemple on a bien qu'en enlevant tous les kaplas sauf celui du milieu le barycentre reste dans le carré et qu'en plus de cela c'est une position parfaite.

Sur le deuxième exemple on a bien qu'en enlevant les deux kaplas des cotés extrêmes et le kapla du milieu le barycentre reste dans le carré et qu'en plus de cela c'est une position parfaite.

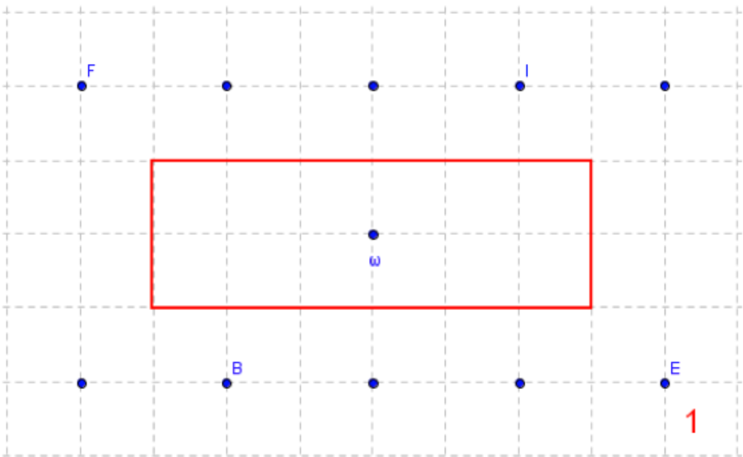
Sur le troisième exemple on a bien qu'en enlevant les deux kaplas des cotés centraux et le kapla du milieu le barycentre reste dans le carré et qu'en plus de cela c'est une position parfaite.

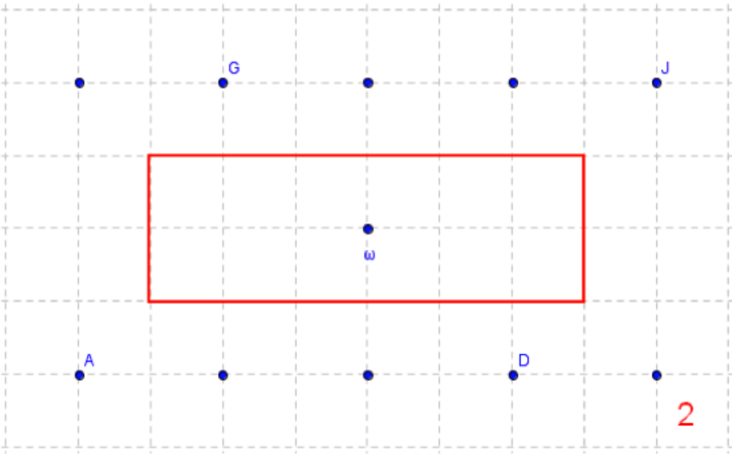
Les cas précédemment étudiés ne sont pas suffisants pour satisfaire l'algorithme que nous verrons ultérieurement. Pour ce faire nous devons étudier les barycentres de 2 étages et non un seul.

On appelle A, B, C, D, E, F, G, H, J des représentants des kaplas et ω le barycentre des points [(A,1) (B,1) (C,1) (D,1) (E,1 (F,1) (G,1) (H,1) (I,1) (J,1)]



On obtient les résultats suivants :




G
J
ω
A
D
2

LE RESULTAT DES RECHERCHES

Comment gagner à tous les coups lorsqu'on joue avec des niveaux à trois kaplas ?

Lorsque le nombre d'étages jouables est pair :

Propriété 1

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est pair, le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 mais sur un autre étage.

Lorsque le nombre d'étages jouables est impair :

Propriété 2

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est impair, le joueur 1 gagne. Il sacrifiera un étage en enlevant le kapla du milieu et se retrouvera ainsi dans un cas où n est pair et où il est le joueur 2. Donc il exécutera la propriété 1

Comment gagner à tous les coups lorsqu'on joue avec des niveaux à quatre kaplas ?

Propriété 3

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Quel que soit n appartenant à IN, le joueur 2 gagne en imitant le joueur 1 sur le même étage de façon symétrique par rapport au milieu.

Comment gagner à tous les coups lorsqu'on joue avec des niveaux à cinq kaplas ?

<u>Propriété 4</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est multiple de 4 (n = 0 [4]) le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 sur l'étage complémentaire et de façon symétrique par rapport au milieu.

<u>Propriété 5</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n=4k+1 , avec k Є IN *(n = 1 [4])le joueur 1 gagne. Il commencera par enlever le milieu d'un étage. Ensuite il appliquera le même algorithme que dans la propriété 4 sauf pour l'étage où il aura enlevé le milieu. Sur celui-ci il jouera comme énoncé dans la propriété 3 c'est-à-dire en imitant ce que fait le joueur adverse de façon symétrique par rapport au milieu.*

<u>Propriété 6</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n=4k+2, avec k Є IN *(n = 2 [4])le joueur 2 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 2 étages. Sur ceux la, il jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.*

<u>Propriété 7</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n=4k+3 , avec k Є IN *(n = 3 [4])le joueur 1 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 3 étages. Sur l'un de ces trois, il retirera le milieu de l'étage. Par la suite, si sur ce même étage le joueur adverse retire un kapla il faudra retire le symétrique (par rapport au milieu) sur le même étage. Pour les deux autres niveaux restants,le joueur 1 jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.*

LES MAUVAIS RESULTATS

Bien sûr, en cherchant on se trompe souvent ! Et donc nous avons crée des algorithmes faux. On donnera un contre exemple à chaque fois pour montrer que c'est faux.

Pour l'élaboration de la propriété 1, nous pensions cela :

Propriété 1 F

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est pair, le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 SUR N'IMPORTE QUEL ETAGE.

C'est faux, voici un contre exemple pour le prouver :
Nous allons voir à travers l'évolution de la matrice associée à la tour que la propriété 1F n'est pas juste.
Avant de commencer à jouer la tour est sous cette forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Joueur 1	Joueur 2
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	PERDU

Le joueur 2 perd dans cet exemple alors qu'il suit la propriété 1F.

Propriété 1 F*

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est pair, le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 SUR LE MEME ETAGE .

C'est faux, en utilisant le même contre exemple que pour la propriété 1F on prouve que la propriété 1F* est fausse.

Pour l'élaboration de la propriété 3, nous pensions cela :

<u>Propriété 3F</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Le joueur 2 gagne en JOUANT CE QU'IL VEUT sur le même étage que celui où à joué le joueur 1.

Donnons un contre-exemple pour montrer que c'est faux.

Si l'on joue de cette façon, on peut tout simplement se retrouver dans cette situation :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Et lorsque le nombre d'étages est grand ca ne tient pas.
Donc la propriété 3F n'est pas vraie.

<u>Propriété 3F*</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Quel que soit n appartenant à IN, le joueur 2 gagne en en imitant le joueur 1 MAIS SUR UN AUTRE ETAGE

C'est faux, en utilisant le même contre exemple que pour la propriété 3F on prouve que la propriété 3F* est fausse car on peut se retrouver dans même cas où la tour ne tient pas.

Pour élaborer les propriétés des cas avec des étages à 5 kaplas c'est-à-dire les propriétés 4, 5, 6, 7, nous nous étions trompé. Nous pensions distinguer seulement les cas où le nombre d'étages est pair et où il est impair. Or, nous avons vu qu'il y avait un problème d'équilibre dans ce cas là.

Au début nous pensions que cette propriété était juste :

<u>Propriété pour les cas avec des étages à 5 kaplas (fausse)</u>

Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

.*Si n est pair le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 SUR N'IMPORTE QUEL AUTRE ETAGE .*

.*Si n est impair le joueur 1 gagne. Il commencera à enlever un milieu et par la suite il reproduira ce que fait le joueur adverse sur n'importe quel étage sauf sur l'étage où le joueur 1 à enlevé le milieu (au début) sur lequel il jouera, sur le même étage, le symétrique de ce qu'a joué l'adversaire.*

En jouant de cette façon, il y a des cas où le barycentre de la tour peut se retrouver en dehors de la zone requise pour que la tour tienne. Donc cette propriété est fausse.

LES DEMONSTRATIONS

__Démonstration par récurrence de la propriété 1 :__

Pn :	Soit n le nombre d'étages. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme. Si n est pair, le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 mais sur un autre étage.

On admettra que si la tour est tombée au rang i alors au rang i-1 elle était sous cette représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & \bar{a} & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \bar{a} & a \end{pmatrix}$$

Avec a Є {0 ; 1} et $\bar{a}$ son complémentaire

Récurrence sur k avec n=2k, avec k Є IN

. Si k = 0 Le joueur 1 a perdu.

. Supposons que Pn est vraie jusqu'au rang k. Montrons alors qu'elle est vrai au rang k+1 c'est-à-dire avec n = 2k+2.

Lorsque n = 2k + 2 on applique Pn jusqu'à 2k étages et il reste 2 étages. Nous sommes dans cette situation :

$$\begin{array}{l} 2k \begin{cases} a & \bar{a} & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \bar{a} & a \end{cases} \\ + \\ 2 \begin{cases} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{cases} \end{array}$$

Il reste deux étages jouables et donc on continue à appliquer la propriété pour ces deux derniers. Il y a deux cas possible. C'est au joueur 1 de jouer.

Premièrement, il y a le cas où *le joueur 1 commence par enlever un coté*. Le joueur 2 enlèvera donc un coté du deuxième étage. Le joueur 1 ne pourra alors qu'enlever un autre côté. Le joueur 2 répliquera avec un coté d'un autre étage. À ce moment la le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

Joueur 1	Joueur 2
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
PERDU	GAGNÉ

Deuxièmement, il y a le cas où *le joueur 1 commence par enlever un milieu.* Le joueur 2 enlèvera donc le milieu sur l'autre étage. À ce moment la le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

Joueur 1	Joueur 2
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
PERDU	GAGNÉ

Donc Pn est vraie au rang k+1 donc elle est vraie pour tout k Є IN.

Démonstration de la propriété 2 :

La démonstration pour le cas où n est impair et déjà dans la propriété 2 : « *Si n est impair, le joueur 1 gagne. Il sacrifiera un étage en enlevant le kapla du milieu et se retrouvera ainsi dans un cas où n est pair et où il est le joueur 2. Donc il exécutera la propriété 1* (que nous venons de prouver) *»*.

Démonstration par récurrence de la propriété 3 :

> Pn : Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.
>
> Quel que soit n appartenant à IN, le joueur 2 gagne en imitant le joueur 1 sur le même étage de façon symétrique par rapport au milieu.

On admettra que si la tour est tombée au rang i alors au rang i-1 alors tous les étages de la tour seront de l'une de ces formes matricielles en appliquant l'algorithme de cette propriété:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Lorsque n = 0, c'est à dire que le nombre d'étages est nul, la propriété est vraie car la tour est déjà tombée.

Maintenant supposons que Pn est vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang n+1.

Pour n+1 étages on applique la propriété jusqu'à n sue l'on suppose vraie jusqu'ici. Il reste donc un étage. Nous sommes dans cette situation :

Il y a n étages de la forme (1 0 0 2) ou de la forme (0 1 2 0) et un étage rempli de la forme (1 1 2 2)

$$\begin{array}{ll} n & \begin{cases} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{cases} \\ +1 & \{ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Il reste un seul étage jouable donc on continue à appliquer la propriété sur celui-ci. Il y a deux cas possible. C'est au joueur 1 de jouer.

1er cas : Le joueur 1 retire un kapla du milieu. Le joueur 2 jouera alors sur ce même étage un milieu. À ce moment la le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

Joueur 1	Joueur 2
(1 0 2 2)	(1 0 0 2)
PERDU	GAGNÉ

<u>2^e cas</u> : Le joueur 1 retire un kapla d'un côté. Le joueur 2 jouera alors sur ce même étage l'autre coté qu'il reste comme indiquée dans l'algorithme. À ce moment la le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

Joueur 1	Joueur 2
(0 1 2 2)	(0 1 2 0)
PERDU	GAGNÉ

Donc Pn est vraie au rang n+1 donc elle est vraie pour tout n appartenant à IN.

<u>Démonstrations par récurrence des propriétés 4, 5, 6, et 7 :</u>

Pn : Soit n le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est multiple de 4 (n = 0 [4]) le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 sur l’étage complémentaire et de façon symétrique par rapport au milieu.

On admettra que si la tour est tombée au rang i alors au rang i-1 alors tous les étages de la tour seront de l’une de ces formes matricielles en appliquant l’algorithme de cette propriété. (Lorsqu’il y aura une forme, nous trouverons aussi sont complémentaire.) :

FORME NORMALE	COMPLÉMENTAIRE
L1 = (0 0 3 0 0)	(0 0 3 0 0) = L1*
L2 = (1 0 0 2 0)	(0 1 0 0 2) = L2*
L3 = (1 0 0 0 2)	(1 0 0 0 2) = L3*
L4 = (0 1 0 0 2)	(1 0 0 2 0) = L4*
L5 = (0 1 0 2 0)	(0 1 0 2 0) = L5*

Récurrence sur k avec n=4k, avec $k \in$ IN.

. Si k = 0 Le joueur 1 a perdu.

. Supposons que Pn est vraie jusqu’au rang k. Montrons alors qu’elle est vrai au rang k+1 c'est-à-dire avec n = 4(k+1) = 4k + 4.

Lorsque n = 4k + 4 on applique Pn jusqu’à 4k étages et il reste 4 étages. Nous sommes dans cette situation :

$$4k \begin{cases} L \\ Li \\ L* \\ Li* \\ \vdots \end{cases}$$

$$+4 \begin{cases} 1\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 2 \\ 1\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 2 \\ 1\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 2 \\ 1\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 2 \end{cases}$$

Il y a 4k étages de la forme des L1, L2, L3, L4, L5 et 4 étages remplis.

Il reste quatre étages jouables et donc on continue à appliquer la propriété pour ces quatre derniers. Il y a beaucoup trop de cas possibles pour résonner comme dans les cas précédents. Nous allons donc procéder différemment.

La méthode de la propriété nous dit qu'il faut reproduire de façon symétrique sur un étage complémentaire ce que fait l'adversaire. Or si l'adversaire joue un coup qui marche, alors notre coup marchera aussi. Sinon la tour tombe et il aura perdu. Et comme il reste un nombre pair de kaplas ce sera le joueur 1 qui fera tomber la tour.

Donc Pn est vraie pour n=4k + 4 c'est à dire au rang k+1 donc elle est vraie pour tout k appartenant à IN.

Si n = 4k + 1, avec *k* Є IN, la preuve ne diffère que sur un étage. La propriété nous dit « *le joueur 1 gagne. Il commencera par enlever le milieu d'un étage. Ensuite il appliquera le même algorithme que dans la propriété 4 sauf pour l'étage où il aura enlevé le milieu. Sur celui-ci il jouera comme énoncé dans la propriété 3 c'est-à-dire en imitant ce que fait le joueur adverse de façon symétrique par rapport au milieu.* »

Preuve sur le dernier étage restant : Le joueur 1 est le premier à jouer sur cet étage. En enlevant le milieu de l'étage il reste un nombre pair de kapla. En reproduisant ce que fait le joueur adverse de façon symétrique par rapport au milieu le joueur 1 gagne quoi qu'il arrive.

Si n = 4k + 2, avec *k* Є IN, la preuve ne diffère que sur deux étages. La propriété nous dit « *le joueur 2 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 2 étages. Sur ceux la, il jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.* »

Preuve sur les deux étages restants : Il reste un nombre pair de kaplas. Et c'est le joueur 1 qui commence à toucher à l'un de ces deux étages. Donc en reproduisant ce que fait le joueur 1 mais sur un autre étage, le joueur 2 gagne forcément sans soucis d'équilibre de la tour.

Si n = 4k + 3, avec *k* Є IN, la preuve ne diffère que sur trois étages. La propriété nous dit « *le joueur 1 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 3 étages. Sur l'un de ces trois, il retirera le milieu de l'étage. Par la suite, si sur ce même étage le joueur adverse retire un kapla il faudra retire le symétrique (par rapport au milieu) sur le même étage. Pour les deux autres niveaux restants,le joueur 1 jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.* ».

Preuve sur les trois étages restants : Le joueur 1 est le premier à toucher à un de ces trois étages. En retirant le milieu d'un étage il reste un nombre pair de kaplas. Si, sur ce même étage il retire le symétrique que ce que son adversaire a joué alors le joueur 1 sera le dernier à retirer un kapla de cet étage. Sur les autres étages, il sera aussi le dernier à pouvoir retirer un kapla sans que la tour ne tombe. Donc le joueur 1 gagne à tous les coups.

RECHERCHES ET FAUSSES PISTES DES DÉMONSTRATIONS

Après avoir trouvé les propriétés, il fallait trouver leurs démonstrations pour les prouver. Mais, n'ayant jamais fait de preuves dans « l'univers de la tour infernale » nous avons mis du temps avant de trouver la bonne méthode.

Nous avons essayé de trouver la preuve par l'absurde mais nous avons vite vu que ce n'était pas le bon type de raisonnement à avoir.

Nous avons essayé de trouver une preuve par l'analyse mais pendant que nous cherchions nous avons réalisé, avec l'aide des enseignants de « math en jean » que la preuve devait se faire par récurrence.

Par conséquent, nous avons attaqué la démonstration par récurrence en commençant par le cas le plus simple, le cas avec des étages à trois kaplas.
Mais un détail nous gênés. Nous avions distingué le cas pair et la cas impair (n= 2k ou n= 2k +1) et nous ne savions pas s'il fallait faire une récurrence sur n ou bien sur k.
Nous avons commencé par la faire sur n, mais nous n'étions vraiment pas sûr de nous. Donc, nous avons finalement refait la démonstration par récurrence sur k cette fois en étant sûrs que c'est juste.

Ensuite, pour la démonstration de la propriété 4 nous avons beaucoup « galéré ». En fait, nous avions envisagé d'énumérer tous les cas possibles qu'il restait à la fin de la démonstration comme nous l'avions fait pour les démonstrations précédentes.
Mais, cette méthode, qui reste encore possible, ne s'est avérée pas du tout « rentable ». En effet, elle est très longue, compliquée et très « casse gueule ». Pour réussir avec cette méthode nous avons essayé de voir tous les cas possibles avec un arbre comme avec les probabilités. Finalement nous avons changé de méthode et nous avons utilisé la méthode que l'on peut voir dans la démonstration actuelle de la propriété 4. Cette méthode, rapide et efficace nous l'avons réutilisée pour les démonstrations des propriétés 5, 6, et 7.

OUVERTURE

À partir de nos algorithmes nous pouvons résoudre bien plus que ce que nous avions envisagé. Nos algorithmes sont bien plus puissants que ce que nous pensions. En effet, nous pouvons envisager tout type de situation.

Pour commencer, nous souhaitions trouver comment gagner à tous les coups dans un jeu simple c'est à dire avec deux joueurs, avec des kaplas identiques, de même poids, de même taille, posés de manière couché. La tour devait être avec des étages identiques. Les étages seraient tous remplis de trois ou quatre ou même à cinq kaplas.

Ensuite, après avoir résolu le problème de départ, nous avons imaginé d'autres situations pour continuer les recherches sur le sujet de la tour infernale. Et à notre grande surprise, nos algorithmes pouvaient résoudre beaucoup d'autres problèmes.

Nos propriétés et nos algorithmes nous permettent d'avancer beaucoup plus rapidement et facilement à l'élaboration de ces questions ou même d'y répondre :

Comment gagner lorsqu'on joue avec une tour qui, au départ n'est pas totalement remplie (mais qui tient bien évidemment) ?

Comment gagner avec des kaplas debout (à la place d'être couchés) ?

Comment gagner lorsqu'on joue avec une tour dont pas tous les étages sont identiques ?
(Avec x étages à 3 kaplas, y étages à 4 kaplas, et z étages à 5 kaplas)

Comment gagner si l'on joue à trois joueurs qui jouent en suivant tous le même algorithme ?

Comment gagner avec des kaplas non identiques, qui ont des poids différents?

Nous pensons connaître la réponse à certaines de ces questions mais pas à toutes. De plus, pour celles auxquelles nous pensons savoir la réponse nous n'avons pas encore assez élaboré la solution et nous n'avons pas de preuve concrète. C'est pour cette raison que ça n'apparaît pas dans les résultats de ce cahier commun de recherche.

Par conséquent, dans une optique d'ouverture et d'avenir, il faudrait réussir à trouver la réponse à toutes ces questions, à en trouver les preuves.

Il serait aussi très intéressant d'élaborer un nouveau type de tour infernale avec des règles un peu différentes. Par exemple nous pensons à une tour infernale avec des kaplas de différentes couleurs. Selon les couleurs, on gagne un nombre de points différents. Et bien sûr, ceux qui rapportent le plus de points seraient mis à des endroits plus risqués.

En outre, on pourrait également trouver un autre langage mathématique pour traduire ce problème et trouver également d'autres démonstrations passionnantes.