

ELBAZ Dan

**MATH EN JEANS**  
**SUJET DE RECHERCHE CHOISI :**  
**LA TOUR INFERNALE**



**RAPPORT DE TRAVAIL PERSONNEL**

Année 2011/2012 Semestre 4.

## **SOMMAIRE**

- TRAVAIL PERSONNEL DE RECHERCHE
- BILAN D'EXPERIENCE
- COMPTE RENDU SUR LES GRAPHS PLANAIRES
- DEFI

## TRAVAIL PERSONNEL DE RECHERCHE

J'ai choisi comme sujet de recherche la tour infernale car j'ai beaucoup joué à ce jeu étant petit. Par conséquent, le sujet me tenait beaucoup à cœur.

Lors des premières séances, pour la mise en place de la problématique, je savais exactement à quelles questions je voulais répondre en priorité. C'est pour cela que la problématique s'est tournée essentiellement sur « comment gagner à tous les coups dans ce jeu ».

Tout au long des recherches, mon partenaire et moi-même avons beaucoup travaillé en groupe. Donc, tous les résultats que nous avons pu avoir nous les devons à nous deux. Nous travaillions de cette façon : à la fin de chaque séance de td de math en jeans nous établissions un sujet auquel nous réfléchissions toute la semaine chacun de notre côté et nous faisons un bilan lors de la séance de td suivante. Nous avons établi cette méthode car nous n'étions que deux dans le groupe.

Nous avons, ensemble, fait des recherches de façon naïve au début, recherché une traduction mathématique du problème, changé notre façon de penser pour les recherches, travaillé sur l'équilibre de la tour, cherché et trouvé des algorithmes qui marchaient ou non, nous nous sommes embarqué parfois dans de fausses pistes.

Je me suis investie dans tous ces sujets là mais si je devais choisir un sujet dans lequel je me suis le plus retrouvé, dans lequel j'étais le plus passionné, ce serait dans l'élaboration des propriétés et dans leurs démonstrations. Voici le résultat :

### **Comment gagner à tous les coups lorsqu'on joue avec des niveaux à trois kaplas ?**

Lorsque le nombre d'étages jouables est pair :

#### **Propriété 1**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Si  $n$  est pair, le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 mais sur un autre étage.*

Lorsque le nombre d'étages jouables est impair :

**Propriété 2**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Si  $n$  est impair, le joueur 1 gagne. Il sacrifiera un étage en enlevant le kapla du milieu et se retrouvera ainsi dans un cas où  $n$  est pair et où il est le joueur 2. Donc il exécutera la propriété 1*

**Comment gagner à tous les coups lorsqu'on joue avec des niveaux à quatre kaplas ?**

**Propriété 3**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Quel que soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , le joueur 2 gagne en imitant le joueur 1 sur le même étage de façon symétrique par rapport au milieu.*

**Comment gagner à tous les coups lorsqu'on joue avec des niveaux à cinq kaplas ?**

**Propriété 4**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage a son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Si  $n$  est multiple de 4 (  $n \equiv 0 [4]$  ) le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 sur l'étage complémentaire et de façon symétrique par rapport au milieu.*

### **Propriété 5**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Si  $n=4k+1$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  ( $n = 1 [4]$ ) le joueur 1 gagne. Il commencera par enlever le milieu d'un étage. Ensuite il appliquera le même algorithme que dans la propriété 4 sauf pour l'étage où il aura enlevé le milieu. Sur celui-ci il jouera comme énoncé dans la propriété 3 c'est-à-dire en imitant ce que fait le joueur adverse de façon symétrique par rapport au milieu.*

### **Propriété 6**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Si  $n=4k+2$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  ( $n = 2 [4]$ ) le joueur 2 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 2 étages. Sur ceux là, il jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.*

### **Propriété 7**

*Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.*

*Si  $n=4k+3$ , avec  $k \in \mathbb{N}$  ( $n = 3 [4]$ ) le joueur 1 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 3 étages. Sur l'un de ces trois, il retirera le milieu de l'étage. Par la suite, si sur ce même étage le joueur adverse retire un kapla il faudra retire le symétrique (par rapport au milieu) sur le même étage. Pour les deux autres niveaux restants, le joueur 1 jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.*

### Démonstration par récurrence de la propriété 1 :

P<sub>n</sub> : Soit n le nombre d'étages. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si n est pair, le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 mais sur un autre étage.

On admettra que si la tour est tombée au rang i alors au rang i-1 elle était sous cette représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & \bar{a} & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \bar{a} & a \end{pmatrix}$$

Avec  $a \in \{0 ; 1\}$  et  $\bar{a}$  son complémentaire

Récurrence sur k avec  $n=2k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$

. Si  $k = 0$  Le joueur 1 a perdu.

. Supposons que P<sub>n</sub> est vraie jusqu'au rang k. Montrons alors qu'elle est vraie au rang k+1 c'est-à-dire avec  $n = 2k+2$ .

Lorsque  $n = 2k + 2$  on applique P<sub>n</sub> jusqu'à 2k étages et il reste 2 étages. Nous sommes dans cette situation :

$$\begin{array}{r} 2k \left\{ \begin{array}{ccc} a & \bar{a} & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \bar{a} & a \end{array} \right. \\ + \\ 2 \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Il reste deux étages jouables et donc on continue à appliquer la propriété pour ces deux derniers. Il y a deux cas possible. C'est au joueur 1 de jouer.

**Premièrement**, il y a le cas où *le joueur 1 commence par enlever un côté*. Le joueur 2 enlèvera donc un côté du deuxième étage. Le joueur 1 ne pourra alors qu'enlever un autre côté. Le joueur 2 répliquera avec un côté d'un autre étage. À ce moment là le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

| Joueur 1                                                                         | Joueur 2                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| PERDU                                                                            | GAGNÉ                                                                            |

**Deuxièmement**, il y a le cas où *le joueur 1 commence par enlever un milieu*. Le joueur 2 enlèvera donc le milieu sur l'autre étage. À ce moment là le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

| Joueur 1                                               | Joueur 2                                               |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| PERDU                                                  | GAGNÉ                                                  |

Donc  $P_n$  est vraie au rang  $k+1$  donc elle est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

### **Démonstration de la propriété 2 :**

La démonstration pour le cas où  $n$  est impair et déjà dans la propriété 2 : « Si  $n$  est impair, le joueur 1 gagne. Il sacrifiera un étage en enlevant le kapla du milieu et se retrouvera ainsi dans un cas où  $n$  est pair et où il est le joueur 2. Donc il exécutera la propriété 1 (que nous venons de prouver) ».

### Démonstration par récurrence de la propriété 3 :

$P_n$  : Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Quel que soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , le joueur 2 gagne en imitant le joueur 1 sur le même étage de façon symétrique par rapport au milieu.

On admettra que si la tour est tombée au rang  $i$  alors au rang  $i-1$  alors tous les étages de la tour seront de l'une de ces formes matricielles en appliquant l'algorithme de cette propriété:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque  $n = 0$ , c'est à dire que le nombre d'étages est nul, la propriété est vraie car la tour est déjà tombée.

Maintenant supposons que  $P_n$  est vraie au rang  $n$ . Montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ .

Pour  $n+1$  étages on applique la propriété jusqu'à  $n$  sue l'on suppose vraie jusqu'ici. Il reste donc un étage. Nous sommes dans cette situation :

Il y a  $n$  étages de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  ou de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et un étage rempli de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} n \\ +1 \end{array} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il reste un seul étage jouable donc on continue à appliquer la propriété sur celui-ci. Il y a deux cas possible. C'est au joueur 1 de jouer.

**1<sup>er</sup> cas :** Le joueur 1 retire un kapla du milieu. Le joueur 2 jouera alors sur ce même étage un milieu. À ce moment la le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.



Voici la représentation matricielle de ce cas :

| Joueur 1  | Joueur 2  |
|-----------|-----------|
| (1 0 2 2) | (1 0 0 2) |
| PERDU     | GAGNÉ     |

**2<sup>e</sup> cas** : Le joueur 1 retire un kapla d'un côté. Le joueur 2 jouera alors sur ce même étage l'autre coté qu'il reste comme indiquée dans l'algorithme. À ce moment la le joueur 2 a gagné car on ne peut plus retirer de kaplas sans faire tomber la tour et c'est au joueur 1 de jouer.

Voici la représentation matricielle de ce cas :

| Joueur 1  | Joueur 2  |
|-----------|-----------|
| (0 1 2 2) | (0 1 2 0) |
| PERDU     | GAGNÉ     |

Donc  $P_n$  est vraie au rang  $n+1$  donc elle est vraie pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ .

## Démonstrations par récurrence des propriétés 4, 5, 6, et 7 :

$P_n$  : Soit  $n$  le nombre de niveaux jouables. On supposera que les deux joueurs jouent de façon optimale. Chaque étage à son complémentaire qui se situe deux étages au dessus (ou en dessous). On admet que les kaplas sont tous identiques, de même poids et de même forme.

Si  $n$  est multiple de 4 ( $n = 0 [4]$ ) le joueur 2 gagne en reproduisant ce que fait le joueur 1 sur l'étage complémentaire et de façon symétrique par rapport au milieu.

On admettra que si la tour est tombée au rang  $i$  alors au rang  $i-1$  alors tous les étages de la tour seront de l'une de ces formes matricielles en appliquant l'algorithme de cette propriété. (Lorsqu'il y aura une forme, nous trouverons aussi son complémentaire.) :

FORME NORMALE

COMPLÉMENTAIRE

$$L1 = (0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0)$$

$$(0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0) = L1^*$$

$$L2 = (1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0)$$

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2) = L2^*$$

$$L3 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2)$$

$$(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2) = L3^*$$

$$L4 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2)$$

$$(1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0) = L4^*$$

$$L5 = (0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0)$$

$$(0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0) = L5^*$$

Récurrence sur  $k$  avec  $n=4k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ .

. Si  $k = 0$  Le joueur 1 a perdu.

. Supposons que  $P_n$  est vraie jusqu'au rang  $k$ . Montrons alors qu'elle est vraie au rang  $k+1$  c'est-à-dire avec  $n = 4(k+1) = 4k + 4$ .

Lorsque  $n = 4k + 4$  on applique  $P_n$  jusqu'à  $4k$  étages et il reste 4 étages. Nous sommes dans cette situation :

$$\begin{array}{c} 4k \left\{ \begin{array}{l} L \\ Li \\ L^* \\ Li^* \\ \vdots \end{array} \right. \\ +4 \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Il y a  $4k$  étages de la forme des  $L1, L2, L3, L4, L5$  et 4 étages remplis.

Il reste quatre étages jouables et donc on continue à appliquer la propriété pour ces quatre derniers. Il y a beaucoup trop de cas possibles pour résonner comme dans les cas précédents. Nous allons donc procéder différemment.

La méthode de la propriété nous dit qu'il faut reproduire de façon symétrique sur un étage complémentaire ce que fait l'adversaire. Or si l'adversaire joue un coup qui marche, alors notre coup marchera aussi. Sinon la tour tombe et il aura perdu. Et comme il reste un nombre pair de kaplas ce sera le joueur 1 qui fera tomber la tour.

Donc  $P_n$  est vraie pour  $n=4k + 4$  c'est à dire au rang  $k+1$  donc elle est vraie pour tout  $k$  appartenant à  $\mathbb{N}$ .

**Si  $n = 4k + 1$** , avec  $k \in \mathbb{N}$ , la preuve ne diffère que sur un étage. La propriété nous dit « *le joueur 1 gagne. Il commencera par enlever le milieu d'un étage. Ensuite il appliquera le même algorithme que dans la propriété 4 sauf pour l'étage où il aura enlevé le milieu. Sur celui-ci il jouera comme énoncé dans la propriété 3 c'est-à-dire en imitant ce que fait le joueur adverse de façon symétrique par rapport au milieu.* »

Preuve sur le dernier étage restant : Le joueur 1 est le premier à jouer sur cet étage. En enlevant le milieu de l'étage il reste un nombre pair de kapla. En reproduisant ce que fait le joueur adverse de façon symétrique par rapport au milieu le joueur 1 gagne quoi qu'il arrive.

**Si  $n = 4k + 2$** , avec  $k \in \mathbb{N}$ , la preuve ne diffère que sur deux étages. La propriété nous dit « *le joueur 2 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 2 étages. Sur ceux la, il jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.* »

Preuve sur les deux étages restants : Il reste un nombre pair de kaplas. Et c'est le joueur 1 qui commence à toucher à l'un de ces deux étages. Donc en reproduisant ce que fait le joueur 1 mais sur un autre étage, le joueur 2 gagne forcément sans soucis d'équilibre de la tour.

**Si  $n = 4k + 3$** , avec  $k \in \mathbb{N}$ , la preuve ne diffère que sur trois étages. La propriété nous dit « *le joueur 1 gagne. Il suivra l'algorithme de la propriété 4 sauf pour 3 étages. Sur l'un de ces trois, il retirera le milieu de l'étage. Par la suite, si sur ce même étage le joueur adverse retire un kapla il faudra retire le symétrique (par rapport au milieu) sur le même étage. Pour les deux autres niveaux restants, le joueur 1 jouera comme énoncé dans la propriété 1 c'est-à-dire en reproduisant ce que fait le joueur adverse mais sur un autre étage jouable.* ».

Preuve sur les trois étages restants : Le joueur 1 est le premier à toucher à un de ces trois étages. En retirant le milieu d'un étage il reste un nombre pair de kaplas. Si, sur ce même étage il retire le symétrique que ce que son adversaire a joué alors le joueur 1 sera le dernier à retirer un kapla de cet étage. Sur les autres étages, il sera aussi le dernier à pouvoir retirer un kapla sans que la tour ne tombe. Donc le joueur 1 gagne à tous les coups.

## BILAN D'EXPERIENCE

Le jeu de la tour infernale a été très présent durant mon enfance. C'est en partie pour cette raison que j'ai voulu prendre ce sujet. Donc, le fait de faire des recherches sur ce sujet m'a beaucoup plu et m'a même passionné.

En effet, dans ma vie j'ai toujours eu une vie étudiante et une vie personnelle à côté. Mais, je n'ai jamais mélangé les deux ensembles. Je suis en deuxième année de licence de mathématiques, j'aime les mathématiques et pour une fois dans ma vie étudiante je les appliques sur un sujet qui me tenait à cœur.

Étant petit, je me suis toujours demandé lorsque je jouais à la tour infernale : « comment est-ce que je pourrais gagner ? ». Et bien sûr, j'ai abandonné mes petits débuts de recherches et je recommençais à jouer au hasard. Maintenant je connais la réponse et je suis fier d'avoir moi-même trouvé des choses.

De plus, je compte devenir ingénieur et je crois que la matière « math en jeans » est une bonne approche vers métier. Il est vrai que, le seul fait de traduire un problème réel de la vie de tous les jours à un problème mathématique est une approche à ce métier. Et, j'ai réalisé que le passage de quelque chose de matériel à quelque chose de mathématique est vraiment compliqué.

En outre, le sujet que j'ai choisi était très peu, voir pas du tout, abordé par d'autres personnes et c'est aussi cela qui était intéressant. Cela donne une impression d'être « lâché dans la nature » mais permet aussi une certaine autonomie qui permet de ne pas être trop influencé dans les recherches.

Nous ne sommes pas habitués à travailler en groupe dans les milieux scolaires. Et, le fait de travailler par groupe en « math en jeans » est encore une fois une approche au métier que je voudrais faire plus tard. D'ailleurs, la plupart des métiers se font en groupe et non en solitaire. Donc je trouve plutôt judicieux d'instaurer une matière comme celle-là à l'université. Depuis toujours, nous gardons nos résultats pour nous alors que maintenant nous les exposons à tout le monde.

Par ailleurs, j'ai rarement eu envie de travailler en dehors de la faculté pour prolonger les cours chez moi mais cette fois-ci le fait de faire les recherches moi-même me pousse à aller toujours plus loin.

Les cours ainsi que les td de « math en jeans » m'ont sincèrement apporté beaucoup. Ma culture mathématique a grandi et je pense qu'elle contribuera à un bagage mathématique important pour mes études et pour plus tard.

## COMPTE RENDU SUR LES GRAPHS PLANAIRES

J'ai participé à plusieurs sorties mais je ferais le compte rendu d'un poster qui m'a intéressé dont le sujet était les graphes planaires.

Pour aborder ce sujet, les étudiants que nous avons vus s'étaient posé un problème classique. : Il y a trois maisons et trois ressources (gaz, électricité, eau) et chaque maison doit recevoir ces trois ressources sans que celles ci se croisent car il y aurait des dangers. Comment faire ?

Un graphe planaire est justement un graphe dans lequel les arêtes peuvent ne pas se croiser. Donc il faut savoir s'il existe un graphe planaire à six sommets et neuf arêtes.

Ils nous ont expliqué ce qu'était une arête, un sommet, une face, un graphe et un graphe planaire. Puis ils ont donné des exemples.

Ensuite, ils ont introduit la formule d'Euler (mathématicien et physicien suisse du XVIII<sup>e</sup> siècle qui a fait de nombreuses découvertes).

D'après leur recherche,  $2A \geq 3F$  et  $F=2+A-S$  avec A le nombre d'arêtes, F le nombre de faces, et S le nombre de sommets.

Pour finir, ils ont appliqué la formule d'Euler au problème de départ et se sont rendus compte que le problème n'avait pas de solution car le graphe des trois maisons et des trois ressources n'est pas planaire.

# DEFI

## DÉFI 12

| Nombres              | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9             | 10            | 11            | 12            | 13            | 14            | 15            | 16            | 17            | 18            | 19            | 20            | 21            | 22            |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Symboles             |               | L             | U             |               |               |               | L             | L             | L             | U             | U             | U             |               |               |               |               | L             | L             |               |               |               | L             |
| Nb de traits         | 1             | 2             | 3             | 2             | 3             | 4             | 3             | 4             | 5             | 4             | 5             | 6             | 3             | 4             | 5             | 4             | 5             | 6             | 5             | 6             | 7             | 4             |
| Nb de traits cumulés | 1             | 3             | 6             | 8             | 11            | 15            | 18            | 22            | 27            | 31            | 36            | 42            | 45            | 49            | 54            | 58            | 63            | 69            | 74            | 80            | 87            | 91            |
|                      | <del>23</del> | <del>24</del> | <del>25</del> | <del>26</del> | <del>27</del> | <del>28</del> | <del>29</del> | <del>30</del> | <del>31</del> | <del>32</del> | <del>33</del> | <del>34</del> | <del>35</del> | <del>36</del> | <del>37</del> | <del>38</del> | <del>39</del> | <del>40</del> | <del>41</del> | <del>42</del> | <del>43</del> | <del>44</del> |
|                      | L             | L             | L             | L             | L             | L             | L             | U             | U             | U             | U             | U             | U             | U             | U             | U             | U             |               |               |               |               |               |
|                      | L             | U             |               | L             | U             |               | L             | U             |               | L             | U             |               | L             | U             |               | L             | U             |               | L             | U             |               | L             |
|                      | 5             | 6             | 5             | 6             | 7             | 6             | 7             | 8             | 5             | 6             | 7             | 6             | 7             | 8             | 7             | 8             | 9             | 4             | 5             | 6             | 5             | 6             |
|                      | 96            | 102           | 107           | 113           | 120           | 126           | 133           | 141           | 146           | 152           | 159           | 165           | 172           | 180           | 187           | 195           | 204           | 208           | 213           | 219           | 224           | 230           |
|                      | <del>45</del> | <del>46</del> | <del>47</del> | <del>48</del> | <del>49</del> | <del>50</del> | <del>51</del> | <del>52</del> | <del>53</del> | <del>54</del> | <del>55</del> | <del>56</del> |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|                      |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|                      | L             | U             | U             | U             |               | L             | U             |               | L             | L             | U             | U             |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|                      | U             |               | L             | U             |               | L             | U             |               | L             | L             | U             |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|                      | 7             | 6             | 7             | 8             | 5             | 6             | 7             | 6             | 7             | 8             | 7             | 8             |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|                      | 237           | 243           | 250           | 258           | 263           | 269           | 276           | 282           | 289           | 296           | 304           | 312           |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |

Donc, le dernier nombre que Charles a écrit entièrement est 56.