**Rapport Personnel**

**Approfondissement :**

**les cinq polyèdres réguliers de Platon :**

Les polyèdres réguliers sont, dans l'espace, les analogues des polygones réguliers du plan ; leurs faces sont des polygones réguliers identiques, et leurs sommets appartiennent à un même nombre de faces (réguliers et identiques, ils sont "régulièrement" répartis sur une sphère).

Alors qu'il existe une infinité de polygones réguliers convexes, les polyèdres réguliers convexes ne sont que cinq.

Le dodécaèdre n’étant pas un tricaèdre, sa représentation n’est pas donnée ici.



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **nom** | **cube** | **octaèdre** | **tétraèdre** | **icosaèdre** |
| **faces régulières** | 6 carrés | 8 triangles | 4 triangles | 20 triangles |
| **sommets** | 8 | 6 | 4 | 12 |
| **arêtes** | 12 | 12 | 6 | 30 |
| **angle faces** | 90° | 109°28' | 70°32' | 138°11' |

**Preuve :**

 Chaque sommet du solide doit coïncider avec un sommet sur au moins trois faces, sinon ce n'est qu'un point de côté et non un sommet.

 À chaque sommet du solide, le total des angles entre les côtés adjacents relatifs aux faces adjacentes, doit être strictement inférieur à 360 °(convexité)

 Les angles de tous les sommets de toutes les faces d'un solide de Platon sont identiques, donc chaque sommet de chaque face doit contribuer pour strictement moins de 360 °/3=120 °.

 Les polygones réguliers de six côtés ou plus ont seulement des angles de 120 ° ou plus, donc la face commune doit être le triangle, le carré ou le pentagone. Et pour :

* les faces triangulaires : chaque sommet d'un triangle régulier a un angle de 60 °, donc une forme doit avoir 3, 4 ou 5 triangles se rencontrant à un sommet ; celles-ci sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre respectivement.
* les faces carrées : chaque sommet d'un carré a un angle de 90 °, donc il existe seulement un arrangement possible avec trois faces à un sommet, le cube.
* les faces pentagonales : chaque sommet a un angle de 108 ° ; de nouveau, seulement un arrangement, de trois faces à un sommet est possible, le dodécaèdre

il n’existe donc que 5 polyèdres réguliers convexes : le cube, le dodécaèdre, le tétraèdre, l’octaèdre et l’icosaèdre

**Tricaédres non nécéssairement convexes**

**Rappels :**

T est pair (démontré dans le rapport de groupe)

A l’aide de relations de récurrence nous avons déterminé l’existence de tous les tricaèdres non nécessairement convexes en partant de 4 tricaèdres simples : le tétraèdre, le cube et les « toits de maison »(3 carrés 2 triangles , et 4 triangles 1 carré)

On obtient le tableau suivant :



En rouge sont coloriées les cases correspondantes aux tricaèdres à partir desquels nous avons déduit par récurrence l’existence des autres tricaèdres dont les cases sont coloriées en orange.

Les cases blanches ne correspondent à aucuns tricaèdres, elles nous donnent les valeurs de C et T pour lesquelles il n’existe pas de tricaèdre.

**Démonstration :**

le principe de récurrence utilisé consiste en fait à remplacer une face par un des 4 tricaèdres a partir desquels on a construit le tableau.

Soit un tricaèdre composé de C carrés et T triangles avec T ≠ 0,

Alors Il existe un tricaèdre composé de C carrés et T+2 triangles car on peut remplacer une face triangulaire par un tétraèdre.

Ainsi l’existence d’un tricaèdre sur la case (T,C) du tableau implique l’existence de tricaèdres sur les cases (T+2K,C) ,K étant un entier naturel autrement dit cela nous permet de remplir toutes les cases du tableau situées en dessous sur la méme colonne.

Soit un tricaédre composé de C carrés et T triangles avec C ≠ 0,

Alors Il existe un tricaédre composé de C-1 carrés et T+4 triangles car on peut remplacer une face carrée par une pyramide a base carrée(4 faces triangulaires).

Soit un tricaédre composé de C carrés et T triangles avec C ≠ 0,

Alors Il existe un tricaédre composé de C+4 carrés et T triangles car on peut remplacer une face carrée par un cube.

Soit un tricaédre composé de C carrés et T triangles avec T ≠ 0,

Alors Il existe un tricaédre composé de C+3 carrés et T triangles car on peut remplacer une face triangulaire par un toit de maison (3 carrés 2 triangles).

Pour T ≠ 0 ces quatre relations de récurrence suffisent pour déterminer tous les tricaédres existants à partir des quatre tricaédres initiaux, en effet, les tricaédres qui ne seraient pas déduits par les résultats précédents n’existent pas (conjecture) : Ils sont en nombre finis et nous n’avons pas réussi à les construire.

Pour T=0 on utilise la relation C => C+4 en partant du cube(C = 6) c’est-à-dire qu’on remplace à chaque fois une face carrée par un cube

En agençant les cubes d’une certaine manière on a construit un tricaédre composé de 0 triangles et 16 carrés :



Ainsi en utilisant la relation C => C+4 on obtient que pour C pair et T=0 il existe toujours un tricaédre pour C ≥ 14

En réalité pour obtenir un tricaédre ne se déduisant pas du cube par la relation C => C+4 il faut « ajouter un cube » qui sera en contact avec plus d’une face :

Si il est en contact avec deux faces on supprime 2 faces et on en ajoute 6-2=4 ce qui nous fait au total +2 faces, ainsi on peut déduire T=0 , C=16 de T=0 , C=14

Si il est en contact avec 3 faces on aura au total +0 faces et si il est en contact avec plus de faces on aura une diminution du nombre total de faces

Ainsi tous les tricaédres constitués uniquement de carrés se déduisent du cube (C=6) et de C=16 par la relation C => C+4

**Conclusion :** Nous avons résolu totalement le cas des tricaédres non nécessairement convexes :

Pour T ≠ 0, T étant pair il n’y a qu’un nombre fini de valeurs de C et T pour lesquelles il n’existe pas de tricaédre(7 plus exactement cf tableau) et pour C ≥ 9 ou T ≥ 6 il existe toujours un tricaédre composé de C carrés et T triangles ;

Pour T = 0, si C est impair il n’existe pas de tricaédre, si C est pair il existe toujours un tricaédre si C ≥ 14 ,pour C < 14 il n’existe de tricaédre que pour C = 6 (cube) et pour C = 10 (deux cubes juxtaposés)

**Tricaédres convexes eulériens :**

On a :

*Donc d’après la relation d’Euler :*

*De plus, sachant que r = c + t et que on a :*

On obtient ainsi une limite inférieure à la zone des tricaédres convexes Eulériens

De plus, d’après le théorème de la déficience de l’angle solide de Descartes on a :

Or pour tout sommet

Donc

Et finalement :

Nous avons donc montré que le nombre de sommets d’un tricaédre convexe eulérien est inférieur à 24

on peut également montrer avec les mêmes relations que

et on trouve donc une limite supérieure à la zone des TCE.

**Bilan d’expérience de la matière**

Les maths en jeans nous proposent la simulation du travail d’un chercheur adaptée à un niveau mathématique plus accessible.

La matière suscite de la curiosité car les sujets en apparence simples se révèlent complexes et soulèvent des problèmes mathématiques riches en questionnement.

L’approche de la matière est compliquée par le travail de groupe qui requiert de l’organisation à la fois dans le partage des tâches et dans le travail à la maison, il y a donc à la fois une part de travail personnel mais aussi une part collective. Les principaux désavantages de la matière étant qu’elle demande une quantité de travail et un investissement personnel conséquents au regard du peu de connaissances qu’elle apporte par rapport aux matières conventionnelles axées uniquement sur l’apprentissage. L’intérêt est en réalité plutôt méthodologique.

Les maths en jeans proposent une façon différente de travailler en cours : plus que l’application de principes la recherche de principes nouveaux, fondamentaux afin de forger de nouvelles connaissances. Il s’agit alors de partir d’un sujet (les tricaèdres dans notre cas), de le traduire mathématiquement, puis de le questionner sous forme de problèmes afin de trouver des résultats éclairant le sujet (par exemple pour un tricaèdre convexe eulérien le nombre de sommets est inférieur à 24).

Cette méthode de travail a pour avantage de favoriser l’autonomie de l’étudiant face à un problème ainsi que de valoriser des qualités inexploitées - telles que l’intuition, la créativité et la curiosité - dans les matières plus conventionnelles, elle encourage aussi à prendre contact avec des spécialistes afin d’éclairer les recherches.

L’approche est également assez pluridisciplinaire et met en relation généralement plusieurs aspects des mathématiques (dans notre cas majoritairement la théorie des graphes) mais fait appel également à d’autre matières comme l’informatique.

En conclusion les maths en jeans apportent une méthodologie de travail différente des autres disciplines et donc une certaine originalité dans l’approche mathématique ainsi qu’une adaptabilité des étudiants ce qui valorise la formation. Malgré tout les maths en jeans ont été pour moi une matière fastidieuse qui demande beaucoup de travail personnel mais qui stimule intellectuellement.

**Compte rendu du projet hippocampe sur les graphes :**

**1er poster :Le graphe planaire**

**Objectif :déterminer si un graphe est planaire ou non**

A l’aide de la relation d’euler ( Sommets – Arétes + Faces = 2 ) et de la relation suivante :

1. 2A >= 3F

Les étudiants ont montré la relation suivante vérifiée par les graphes planaires:

1. A <= 2S – 4

Cette relation est donc une condition nécessaire mais non suffisante

Pour un graphe dont les régions sont de degrés supérieur ou égal a 4 la relation i) devient :

1. 2A >= 4F

Et la relation ii) devient :

1. A <= 2S – 4

Les étudiants ont ensuite appliqué leurs résultats sur un graphe dont les régions sont de degrés supérieur ou égal à 4 pour montrer que ce graphe ne pouvait pas étre représenté sans croiser les arêtes c’est-à-dire que le graphe n’est pas planaire.

**2eme poster :le théoréme des 6 couleurs**

**Objectif :démontrer le théorème des 6 couleurs**

théorème des 4 couleurs :tout graphe planaire est 4-coloriable

le théorème des 4 couleurs étant trop difficile a démontrer les étudiants de ce groupe ont démontré un théorème analogue mais moins fort, voici le cheminement de leur démonstration :

sachant que tout graphe planaire comporte au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5 (théorème) les étudiants ont fait une récurrence sur le nombre de sommets du graphe, l’initialisation est triviale, ensuite on suppose que pour un graphe de n sommets on a une 6-coloration,pour un graphe de n+1 sommets on retire le sommet de degré <= 5 on peut alors colorier le graphe avec 6 couleurs, on rajoute ensuite le sommet de degré au plus 5, il est relié au plus a 5 couleurs différentes on peut alors lui affecter la 6 iéme couleur et on a une 6-coloration pour n+1 sommets, par récurrence le théorème est démontré.

**3eme poster :des graphes et des chemins**

**Objectifs :résoudre le problème de Königsberg et trouver un algorithme qui détermine le plus court chemin sur un graphe pondéré orienté**

Ce poster était pour moi l’un des plus intéressants car il était assez fourni et pluridisciplinaire ;après avoir posé quelques définitions(degré d’un sommet, graphe connexe, cycle eulérien),les étudiants se sont penchés sur le problème de Königsberg :

Est t’il possible de visiter la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad)entièrement en traversant tous les ponts une seule fois ?

Les étudiants ont modélisé le problème par un graphe ;le résoudre consistant a rechercher un chemin eulérien dans ce graphe, un tel chemin n’existant pas, il n’existe pas de solution au problème de Königsberg

Les étudiants se sont ensuite penchés sur la recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré orienté, ce que font par exemple les GPS ;ils ont trouvé 3 algorithmes :

Algorithme 1 : « force brute »

Cet algorithme consiste simplement a énumérer tous les chemins a partir du point duquel on part et a choisir le plus court, il est très inefficace

Algorithme 2 :

Cet algorithme utilise une récurrence (boucle while) sur la longueur des chemins et recherche un chemin de taille fixe a chaque étape, lorsqu’un tel chemin est trouvé alors sa longueur est minimale et l’algorithme s’arréte . Cet algorithme est peu efficace car il demande de rechercher un chemin de taille i a chaque itération i.

Algorithme 3 : algorithme de Dijkstra

Cet algorithme consiste a trouver le plus court chemin allant a chaque sommet en construisant un second graphe ;cet algorithme est efficace (complexité polynomiale) mais ne marche que si les pondérations sont positives.

**4eme poster :Les graphes planaires**

**Objectifs :résoudre le problème des 3 maisons**

Les étudiants ont posé les définitions de graphe planaire, cycle, degré d’une face, graphe connexe, arbre couvrant

Ils ont ensuite utilisé la relation d’Euler (S – A + F = 2)pour résoudre le problème des 3 maisons et des 3 énergies :

Est il possible de relier chacune des 3 maisons aux 3 énergies sans croiser les conduits sachant que les maisons et les énergies ne sont pas reliées entre elles ?

une fois bien modélisé, résoudre ce problème consiste a trouver une représentation planaire du graphe K3,3 ce qui est impossible d’après le théorème de kuratowski.



Les étudiants ont ensuite énoncé et illustré le théorème suivant :

Tout polyèdre admet une représentation planaire dans le plan

Il s’agit en fait du théorème de Steinitz :
*Tout graphe planaire 3-connexe est isomorphe au 1-squelette d'un polyèdre convexe en 3D.*

**5eme poster :cycles et chemins eulériens**

**Objectifs :résoudre le problème de Königsberg (des 7 ponts)**

Les étudiants de ce groupe se sont intéressés au problème des 7 ponts(ou de Königsberg) ;

Est t’il possible de visiter la ville de Königsberg entièrement en traversant tous les ponts une seule fois et en revenant au point de départ ?

Ils ont tout d’abord essayé de résoudre le problème en modélisant les ponts par des sommets et les iles par des arêtes et en recherchant un cycle Hamiltonien dans le graphe obtenu : ils se sont rendus compte que cela ne répondait pas au problème.

Ils ont alors modélisé les ponts par des arêtes et les iles par des sommets ; résoudre le problème revient a déterminer s’il existe un cycle eulérien dans le graphe obtenu. Etant donné qu’il existe des sommets de degrés impairs dans le graphe, d’après le théorème d’Euler un tel cycle n’existe pas, le problème n’admet donc pas de solution.



**6eme poster :application de la théorie des graphes :graphes probabilistes**

Les définitions de graphe, cycle eulérien, graphe complet, graphe planaire ont été données

Les étudiants se sont ensuite intéressés à la coloration des graphes et plus particulièrement au théorème des 4 couleurs

Théorème des 4 couleurs :tout graphe planaire admet une 4-coloration

La démonstration étant trop complexe, les étudiants se sont écartés de leur sujet initial et ont présenté une application originale et intéressante de la théorie des graphes :

ils nous ont montré que l’on pouvait modéliser l’évolution d’un virus dans une population donnée a l’aide de graphes probabilistes

**Conclusion :**

Ayant suivi un cours sur les graphes durant le premier semestre(maths discrètes 2),je pensais que je ne découvrirais rien durant l’exposition de ce projet, pourtant, l’intérêt et sans doute la curiosité dont ont fait preuve certains étudiants leur ont permis d’aborder le sujet de manière assez originale (poster 3 et 6) ou en tout cas différente de ce qui a été fait durant le cours de maths discrètes 2 ce qui m’a permis d’en apprendre un peu plus sur les graphes.

**Défis optionnels :**

**1)Montrons que h²=x\*y**



D’après le théorème de Pythagore nous avons les relations suivantes :

(x+y)²=a²+b²

x²+h²=b²

h²+y²=a²

donc en remplaçant dans la première équation on obtient :

(x+y)²=x²+y²+2h²

=>x²+y²+2x\*y=x²+y²+2h²

=>h²=x\*y

**2)exercice 13 FFJM :**

On cherche à minimiser la somme des chiffres de N+P sachant que la somme des chiffres de N vaut 1012 et celle de P vaut 2012.

L’idée est d’obtenir un nombre de la forme X000…0000 pour N+P avec X un nombre le plus petit possible

Pour N = 7333333…3333 (un ‘7’ suivi de 335 ‘3’) et P = 1666…6667 (un ‘1’ suivi de 334 ‘6’ suivi d’un 7) on obtient N+P=9000…000 (un ‘9’ suivi de 335 ‘0’)^

La somme des chiffres de N est 7+335\*3=1012 et celle de P est 1+7+334\*6=2012

La somme des chiffres de N+P est donc 9 ;on ne peut pas obtenir moins car on ne peut pas trouver deux suites a(n) et b(n) a termes positifs telles que 9 = a(0) + b(0) + (a(1)+b(1))\*10 + (a(1)+b(1))\*100 + … et a(0)+b(0)=10, a(n)+b(n)=9 pour tout n ≥ 1

En d’autres termes on ne peut pas « répartir » 9 de manière à obtenir des retenues supplémentaires pour créer des 0 lorsqu’on additionne N et P.

**3)exercice 15 FFJM :**

Les cotés du triangle gris mesurent des nombre entiers de centimètres, ce triangle étant rectangle il suffit de trouver le triplet pythagoricien pour lequel l’aire de ce triangle est minimale

Une liste des triplets pythagoriciens dont les termes sont inférieurs a 100 nous assure que (3,4,5) est le triplet recherché :

(3, 4, 5) (20, 21, 29) (11, 60, 61) (13, 84, 85)

(5, 12, 13) (12, 35, 37) (16, 63, 65) (36, 77, 85)

(8, 15, 17) (9, 40, 41) (33, 56, 65) (39, 80, 89)

(7, 24, 25) (28, 45, 53) (48, 55, 73) (65, 72, 97)

On en déduit donc les valeurs d’autres longueurs :



L’aire du carré est donc au minimum (2\*a)²=4\*a² et d’après Pythagore a² = 1² + 2² = 5

Donc l’aire minimale du carré est 20 cm²

**4)exercice 18 FFJM :**

A chaque fois que l’on réalise un tour complet sur le cercle la périodicité d’élimination des numéros est multipliée par 3.

Lors du premier tour tous les entiers congrus à 1[3] sont éliminés, or 2012=3\*670 + 2 donc 2011 est congru a 1[3] et c’est le dernier entier éliminé lors du premier tour

En procédant ainsi, c’est-à-dire en déterminant à chaque tour les entiers éliminés sur une période en s’aidant du dernier entier éliminé lors du tour précédent (qui nous permet de déterminer le premier entier éliminé lors du tour courant) on va pouvoir déterminer l’entier éliminé après 2012

Lors du second tour tous les entiers congrus à 3[9] et à 8[9] sont éliminés, le dernier entier éliminé est 2010 (congru a 3[9])

Lors du troisième tour tous les entiers congrus à 5[27] ,11[27] ,18[27] ,24[27] sont éliminés, le dernier entier éliminé est 2009 (congru a 11[27])

Lors du quatrième tour tous les entiers congrus à 6[81], 15[81], 27[81], 36[81], 47[81], 56[81], 68[81], 77[81] sont éliminés, le dernier entier éliminé est 2012 (congru a 68[81])

L’entier suivant qui est éliminé est donc 14.



**Entiers éliminés lors du tour 1**

**Entiers éliminés lors du tour 2**

**Entiers éliminés lors du tour 3**

**Entiers éliminés lors du tour 4**

**Pistes à explorer, ouvertures**

Â l’aide du programme de Jade nous pouvons pour des valeurs de C et de T données en déduire plusieurs 10-uplets solutions nous avons passé beaucoup de temps à travailler afin de réduire le nombre de solutions et n’avons pas eu le temps de continuer dans cette voie afin de déterminer l’ensemble des tricaèdres convexes eulériens à l’aide du programme.

Néanmoins notre meilleure piste pour poursuivre nos recherches est d’associer à chaque 10-uplet un graphe qui, s’il se révèle planaire confirme l’existence d’un tricaèdre convexe eulérien associé au 10-uplet solution et donc à la valeur de C et de T donnée (on utilise le théorème de Steinitz).

Les deux difficultés principales étant d’associer une matrice d’adjacence a un 10-uplet solution et d’effectuer un test de planarité.

Nous n’avons pas trouvé de moyen efficace pour associer une matrice d’adjacence à un 10-uplet solution.

Par contre pour le test de planarité j’ai trouvé quelques pistes intéressantes dont je voulais vous faire part :

**I)**La première à laquelle j’ai pensé consiste à utiliser le théorème des 4 couleurs : un graphe plan est 4-coloriable

J’ai donc écrit un programme qui détermine si un graphe est 4-coloriable ou non : le problème de 4-colorabilité est décidable (il existe un algorithme pour le résoudre) et NP-complet (et donc également NP) donc le problème de 4-colorabilité se réduit polynomialement au problème SAT.

C’est ce qu’utilise mon programme : il transforme une instance du problème 4-colorabilité en une instance du problème SAT dans sa première partie,

on utilise ensuite minisat (téléchargeable sur <http://minisat.se/MiniSat.html> et fourni dans le dossier du programme) pour déterminer si la formule propositionnelle obtenue (instance du probléme SAT) est satisfiable ou non, si elle n’est pas satisfiable alors le graphe n’est pas 4-coloriable, si elle l’est alors minisat nous donne une affectation des variables satisfaisant la formule, la deuxième partie du programme transforme l’affectation des variables en une 4-coloration.

Le dossier 4-colorabilité contient les deux parties du programme ainsi qu’un descriptif plus technique du fonctionnement du programme

**II)**J’ai ensuite découvert (récemment) un site web ( <http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2009/theophile-trunck.pdf> ) dont je vous avais d’ailleurs parlé lors de la dernière séance évoquant un algorithme mis au point par Demoucron, Malgrange et Pertuiset qui détermine si un graphe est planaire ou non en temps polynomial, ce qui est donc un algorithme très efficace, même sur de gros graphes, malheureusement les explications sur le fonctionnement de l’algorithme ne m’ont pas suffisamment éclairé pour que je puisse l’implémenter.

Mais je suis tombé en rédigeant ce rapport sur le site suivant : <http://www.univ-orleans.fr/lifo/Members/todinca/Cours/Graphes/MonCours.pdf> qui donne clairement l’algorithme précédent.

En conclusion nous avons donc un algorithme polynomial pour déterminer si un graphe est planaire ou non il ne reste donc qu’à trouver le moyen d’associer une matrice d’adjacence a un 10-uplet solution ; l’algorithme de test de planarité étant polynomial on pourrait peut-être même se contenter d’associer plusieurs matrices a un même 10-uplet solution du premier programme et obtenir un temps d’exécution correct pour déterminer si un 10-uplet correspond à un graphe planaire…