



TRICAÈDRES

Étude des tricaèdres convexes eulériens

Relation d'Euler-Poincaré : Dans un graphe connexe

$$s - a + r = 2$$

s : nombre de sommets
a : nombre d'arrêtes
r : nombres de régions (ou faces)

$$\sum_{x \in S} d^{\circ}(x) = 2a$$

S : ensemble des sommets du polyèdre

Le nombre de triangles est pair.

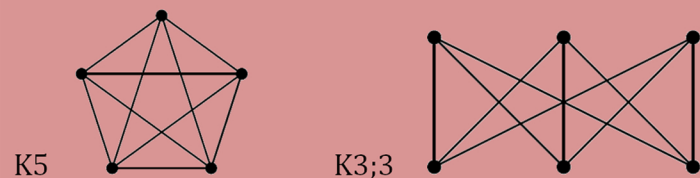
$$\sum_{x \in S} d^{\circ}(x) = 4c + 3t = 2a \Rightarrow 3t = 2(a - 2c)$$

Théorème de Steinitz :

Tout graphe planaire 3-connexe est isomorphe au 1-squelette d'un polyèdre convexe en 3D.

Théorème de Kuratowski :

Un graphe est planaire si et seulement s'il n'a aucun graphe mineur homéomorphe à K_5 ou $K_{3;3}$.



Dans un TCE,
 $\forall x \in S, \quad 3 \leq d^{\circ}(x) \leq 5$

Théorème de déficience de Descartes :

Si un polyèdre est convexe, alors

$$\sum_{x \in S} \delta(x) = 4\pi$$

$$\forall x \in S, \delta(x) = 2\pi - \sum \text{angles au sommet}$$

DÉFINITIONS :

Convexe : Un polyèdre est convexe si, pour tout couple de points intérieurs au polyèdre, le segment les reliant reste dans le polyèdre.

Eulérien : Un polyèdre est eulérien si deux faces juxtaposées ne sont pas coplanaires.

Graphe : Un graphe est un couple (S,A) de sommets et des arrêtes qui les relient.

Connexe : Un graphe est connexe si, pour tout couple de sommets, il existe un chemin, c'est-à-dire une succession d'arrêtes consécutives, les reliant.

Planaire : Un graphe est dit planaire s'il a au moins une représentation dans laquelle les arêtes ne se croisent pas.

Nombre de triangles	Nombre de carrés	Déficience δ	i	Nombre de sommets	Degré
5	0	$\frac{\pi}{3}$	2	x'_2	5
4	0	$\frac{2\pi}{3}$	4	x'_4	4
3	0	π	6	x_6	3
4	1	$\frac{\pi}{6}$	1	x'_1	5
3	1	$\frac{\pi}{2}$	3	x'_3	4
2	1	$\frac{5\pi}{6}$	5	x_5	3
2	2	$\frac{\pi}{3}$	2	x''_2	4
1	2	$\frac{2\pi}{3}$	4	x''_4	3
0	3	$\frac{\pi}{2}$	3	x''_3	3
1	3	$\frac{\pi}{6}$	1	x''_1	4

$$\begin{cases} \sum_{x \in S} d^{\circ}(x) = 2a \\ d^{\circ}(x) \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 2a \leq 5s$$

$$\begin{aligned} s - a + r &= 2 \\ 5r &\leq 10 + 3a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= c + t \\ a &= \frac{4c + 3t}{2} \end{aligned}$$

$$t - 20 \leq 2c$$

$$\begin{cases} \sum_{x \in S} \delta(x) = 4\pi \\ \delta(x) \leq \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow s \times \frac{\pi}{6} \leq 4\pi$$

$$s \leq 24$$

$$2c \leq 44 - t$$