Suites magiques
et
carrés magiques

Plan

I. Suites Magiques

1) Définitions
2) Construction
3) Cas particulier des suites magiques de {1,…,n}
4) Programmes

II. Carrés Magiques

1) Définitions
2) Première approche : méthode empirique.
3) Deuxième approche : structure d’algèbre.
4) Carrés 2-magiques

III. Cubes Magiques

Définitions

Suite *k*-magique et somme *k*-magique, $k \geq 1$

Soit $E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ où $n\geq 2$.

- On appelle **<u>suite *k*-magique de E</u>** toute partition de E en deux sous-ensembles E_1 et E_2 tels que la somme des puissances k-ièmes des éléments de E_1 soit égale à la somme des puissances k-ièmes des éléments de E_2.

- Cette somme est appelée la **<u>somme *k*-magique</u>** de E et est notée $S_E^{(k)}$.

Exemple

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

On pose $E_1 = \{3,5,6\}$ et $E_2 = \{1,2,4,7\}$.

(E_1,E_2) est une suite 1-magique et 2-magique de E

et $S_E^{(1)} = 14$ et $S_E^{(2)} = 70$ car:

$3+5+6 = 1+2+4+7 = 14$

et $3^2+5^2+6^2 = 1^2+2^2+4^2+7^2 = 70$.

Exemples

- ✓ $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

En posant $E_1 = \{1,2,4,8,9,12\}$ et $E_2 = \{3,5,6,7,10,11\}$,

(E_1,E_2) est une suite 3-magique de E et $S_E^{(3)} = 3042$

car $1^3+2^3+4^3+8^3+9^3+12^3 = 3^3+5^3+6^3+7^3+10^3+11^3= 3042$.

- ✓ $E = \{1,3,7,13,15,16,28,41,46,54\}$

En posant $E_1 = \{1,7,16,41,46\}$ et $E_2 = \{3,13,15,28,54\}$,

(E_1,E_2) est une suite 2-magique de E et $S_E^{(2)} = 4103$

car $1^2+7^2+16^2+41^2+46^2 = 3^2+13^2+15^2+28^2+54^2= 4103$.

Questions

Pour un ensemble E de nombres donnés:

- existence de suites magiques?
- comment les énumérer?
- combien y en a-t-il?
- programmes qui liste toutes ces suites et les dénombre?

Une autre formulation du problème

Soient $E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ où $n\geq 2$ et $k\geq 1$.

S'il existe une suite k-magique (E_1,E_2) de E alors

$$\boxed{S_E^{(k)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^k}$$ car $E=E_1\cup E_2$ et donc $2S_E^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}x_i^k$.

Chercher une suite *k*-magique pour *E* revient donc à chercher à écrire $S_E^{(k)}$ comme une somme de puissances *k*-ièmes d'éléments de E tous distincts.

Exemple

- ✓ $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$S_E^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7} i = 14$$

On cherche à écrire 14 comme somme d’éléments de E tous distincts:

$$14 = 1+6+7 = 2+5+7 = 3+4+7 = 3+5+6$$

Alors $E = \{1,6,7\} \cup \{2,3,4,5\} = \{2,5,7\} \cup \{1,3,4,6\}$
$= \{3,4,7\} \cup \{1,2,5,6\} = \{3,5,6\} \cup \{1,2,4,7\}$.

Il y a alors <u>4 suites magiques</u> pour cet ensemble E.

Etude du cas particulier des suites magiques de l'ensemble {1,2,…,*n*}, *n*>1

- On prend $E=\left\{1,2,\ldots,n\right\}$
- Alors $S_E^{(1)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{4}$,

$$S_E^{(2)}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \text{ et } S_E^{(3)}=\frac{n^2(n+1)^2}{8}.$$

- Il n'existe pas de suite *k*-magique (*k*=1,2 ou 3) de E lorsque $n\equiv 1(4)$ ou $n\equiv 2(4)$.

Etude du cas particulier des suites magiques de l'ensemble {1,2,…,*n*}, *n*>1

- Si $n \equiv 0(4)$, alors en posant $p = \dfrac{n}{2}$, on a:

$$S_E^{(1)} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (p-1) + (p+2) + (p+4) + \ldots + 2p.$$

- Si $n \equiv 3(4)$, alors en posant $p = \dfrac{n-3}{4}$, on a:

$$S_E^{(1)} = 1 + 2 + \ldots + p + (n-p) + (n-p+1) + \ldots + n.$$

Ainsi, {1,…,n} admet une suite 1-magique si et seulement si n≡0(4) ou n≡3(4).

Programmes

Soit $E = \{1,2,\ldots,n\}$.

- 1^{er} programme: teste presque toutes les partitions de E en deux sous-ensembles

  $\rightarrow$ beaucoup trop long.

- Programme qui cherche toutes les façons d'écrire $S_E^{(1)}$ comme somme d'éléments distincts de E.
  - Recherche sur les partitions d'un entier
  - Adaptation des résultats trouvés

  $\rightarrow$ programmes qui énumèrent et dénombrent toutes les suites magiques de E.

Principe de ces programmes

Partitions d'un entier k

Ce sont toutes les façons d'écrire k comme une somme d'entiers naturels non nuls inférieurs à k.

Exemple : Suites 1-magiques de $E=\{1,2,3,4\}$.

- On cherche à écrire $S_E^{(1)}=5$ comme une somme d'entiers de E tous distincts.

- Les partitions de 5 avec des entiers inférieurs à 4 sont:

1	1	1	1	1
2	1	1	1	
2	2	1		
3	1	1		
3	2			
4	1			

Décompositions qui nous intéressent

→ On élimine toutes les partitions avec au moins deux entiers égaux.

Principe de ces programmes

Formule qui donne le nombre
de suites magiques de $E=\{1,\dots,n\}$

On note $p_m(l)$ le nombre de partitions de l avec des entiers inférieurs à m tous distincts.

→ On cherche à calculer $p_n(S_E^{(1)})$.

$$\forall\, l \geq m \geq 2,\ p_m(l) = p_{m-1}(l) + p_{m-1}(l-m)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \forall m > l \geq 1,\ p_m(l) = p_l(l) \\ \forall m \geq 0,\ p_m(0) = 1 \\ p_1(l) = 0 \text{ si } l > 1 \text{ et } p_1(1) = 1 \end{cases}$$

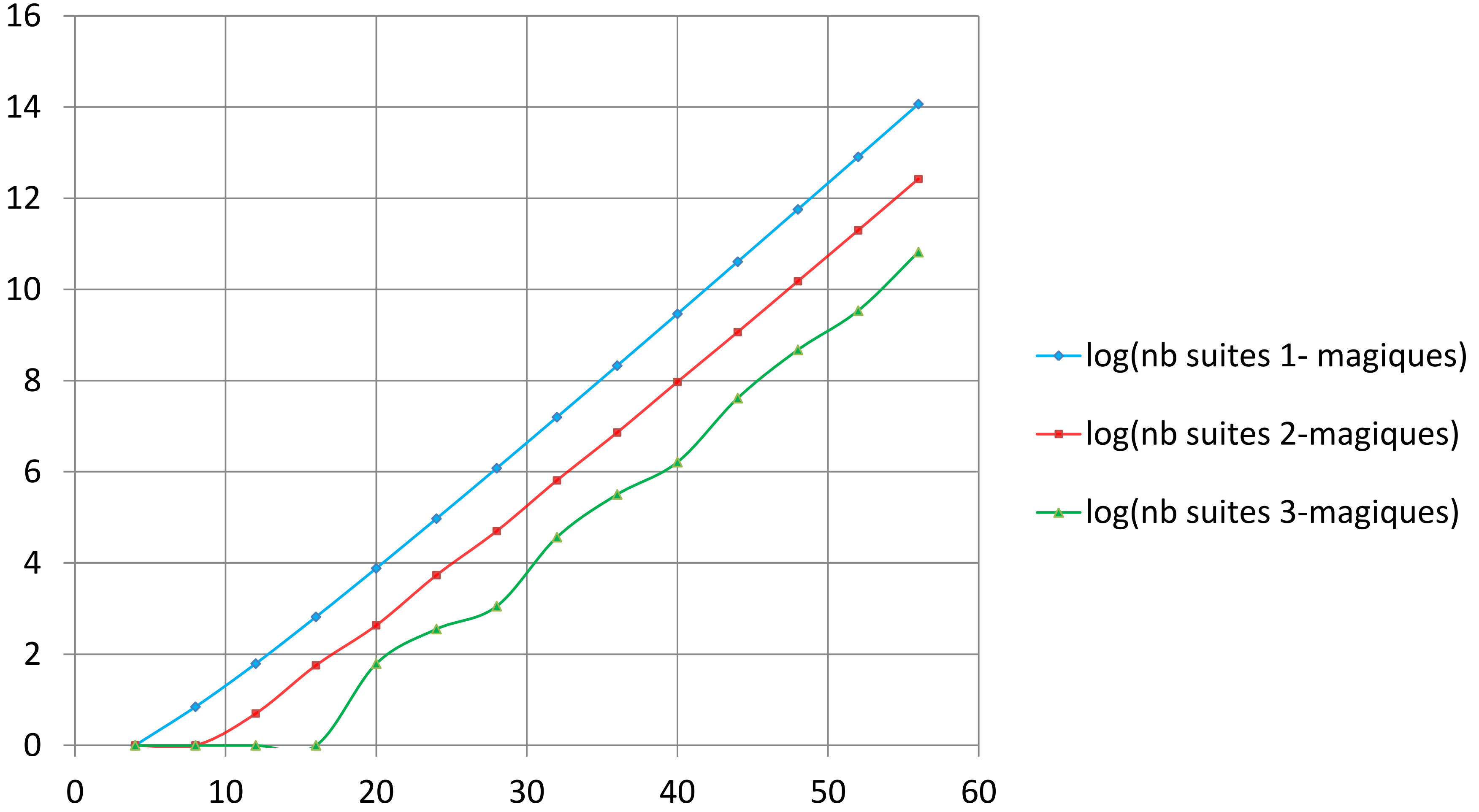
Applications de ces programmes

n	Nombre de suites 1-magiques	Nombre de suites 2- magiques	Nombre de suites 3-magiques
3	1	0	0
4	1	0	0
7	4	1	0
8	7	1	0
11	35	1	0
12	62	5	1
15	361	43	2
16	657	57	1
19	4110	239	2
20	7636	430	62
23	49910	2904	268
24	93846	5419	356
27	632602	27813	2287
28	1199892	50213	1130
31	8273610	348082	5317
32	15796439	649300	36879
35	110826888	3913496	203016
36	212681976	7287183	319415
39	1512776590	50030553	2124580
40	2915017360	93696497	1631750

Pour *n* = 1000, le nombre de suites magiques a **297** chiffres!

Applications de ces programmes

Nombre de suites *k*-magiques (*k*=1,2 ou 3) pour *n* multiple de 4



Résumé des programmes réalisés

Programmes initiaux
(partitions d’un entier)

Suites magiques
de l’ensemble des
premiers entiers consécutifs

Programmes qui listent les suites magiques

Programmes qui dénombrent les suites magiques

Suites magiques
d’un ensemble
d’**entiers naturels**

Carrés *k*-magiques (k>0)
Définition

Soient $n \geq 2$ et $k \geq 1$.

Un **carré *k*-magique** $n \times n$ est une matrice carrée $n \times n$ telle que la somme des puissances k-ièmes des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne soit constante.

Cette constante est la **somme *k*-magique** notée $S^{(k)}$.

Exemples

- ✓ Carré 1-magique:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}1&6&8\\5&7&3\\9&2&4\end{pmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow 15\\ \leftarrow 15\\ \leftarrow 15\end{matrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ 15 & 15 & 15\end{matrix} & \end{array}$$

- ✓ Carré 2-magique (et 1-magique):

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix}9&55&105&36\\69&100&21&15\\28&49&19&109\\99&1&60&45\end{pmatrix} & \begin{matrix}\leftarrow 15427\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & & & \\ 15427 & & & \end{matrix} & \end{array}$$

Questions

- Comment utiliser le travail réalisé sur les suites magiques?

- Les opérations telles que l'addition et la multiplication conservent-elles le caractère magique d'une matrice?

Deux approches du problème

- ***Approche 1***

  On cherche à former un carré k-magique avec les nombres d'un ensemble $E = \left\{x_1, \ldots, x_{n^2}\right\}$ où $n \geq 2$.

  Alors on sait que $S^{(k)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2} x_i^k$.

- ***Approche 2***

  On fixe n>1 et on étudie l'ensemble des carrés k-magiques nxn.

$1^{\text{ère}}$ approche

Soit $E=\left\{x_1,\ldots,x_{n^2}\right\}$ où $n\geq 2$. On connait $S^{(k)}$.

On cherche toutes les combinaisons possibles pour les lignes et les colonnes de l'éventuel carré magique $n{\times}n$ formé des nombres de E.

- Adaptation du programme utilisé pour les suites magiques dans le cas où E est un ensemble d'entiers naturels.

Exemple

$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ et donc } S^{(1)} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3^2} i = 15.$$

→ Combinaisons possibles pour les lignes et les colonnes d'un carré magique 3x3:

6 5 4
7 5 3
7 6 2
8 4 3
8 5 2
8 6 1
9 4 2
9 5 1

On forme alors par exemple le carré:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Inconvénient</u>

Beaucoup trop de cas à distinguer.

Pour n=4, on obtient 86 possibilités.

$2^{\text{ème}}$ approche

Soit $n>1$. On note C_n l'ensemble des carrés 1-magiques $n \times n$.

- **C_n est une sous-algèbre** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_n \in C_n \\ \forall (M,N) \in {C_n}^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda M + \mu N \in C_n \\ \forall (M,N) \in {C_n}^2,\ MN \in C_n. \end{array}}$$

- Soit $s : C_n \to \mathbb{R}$ qui à chaque carré magique associe sa somme 1-magique.

- ***s* est un morphisme d'algèbres**:

$$\boxed{\begin{array}{l} s(I_n) = 1 \\ \forall (M,N) \in {C_n}^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ s(\lambda M + \mu N) = \lambda s(M) + \mu s(N) \\ \forall (M,N) \in {C_n}^2,\ s(MN) = s(M)s(N). \end{array}}$$

Exemples

1783= 1753+2x15

$$
\begin{array}{cc}
1753 \rightarrow & \begin{pmatrix} 7 & 1149 & 597 \\ 1444 & 103 & 206 \\ 302 & 501 & 950 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \downarrow \\ 1753 \end{array}
\end{array}
+2
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \leftarrow 15 \\
\begin{array}{l} \downarrow \\ 15 \end{array} &
\end{array}
=
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 9 & 1159 & 615 \\ 1456 & 117 & 210 \\ 3018 & 507 & 958 \end{pmatrix} & \leftarrow 1783
\end{array}
$$

1496 = 34x44

$$
\begin{array}{cc}
34 \rightarrow & \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} \\
& \begin{array}{l} \downarrow \\ 34 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 24 & 1 & 12 & 7 \\ 11 & 8 & 23 & 2 \\ 5 & 10 & 3 & 26 \\ 4 & 25 & 6 & 9 \end{pmatrix} & \leftarrow 44 \\
\begin{array}{l} \downarrow \\ 44 \end{array} &
\end{array}
=
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 479 & 385 & 345 & 287 \\ 317 & 395 & 371 & 413 \\ 365 & 427 & 339 & 365 \\ 335 & 289 & 441 & 431 \end{pmatrix} & \leftarrow 1496
\end{array}
$$

Remarques

- N'importe quelle puissance d'un carré magique est un carré magique et

$$\boxed{\forall M \in C_n,\ \forall k \in \mathbb{N},\ s(M^k) = s(M)^k.}$$

- Si un carré magique M est inversible, alors M^{-1} est un carré magique et

$$\boxed{s(M^{-1}) = \frac{1}{s(M)}.}$$

Exemples

En prenant $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, on a $s(M) = 15$ et:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 103 & 67 & 55 \\ 64 & 85 & 76 \\ 58 & 73 & 94 \end{pmatrix} \text{ avec } s(M^2) = 225 = s(M)^2$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 945 & 1149 & 1281 \\ 1182 & 1143 & 1050 \\ 1248 & 1083 & 1044 \end{pmatrix} \text{ avec } s(M^3) = 3375 = s(M)^3.$$

Etude du sous-espace vectoriel C_n

$$\boldsymbol{C_n = vect(J_n) \oplus (S_n \cap \ker s) \oplus (A_n \cap \ker s)}$$

où $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ et

- S_n est le sev des matrices *nxn* symétriques,
- A_n est le sev des matrices *nxn* antisymétriques,
- *s* est l'application linéaire de C_n dans $\mathbb{R}$ qui à chaque carré magique associe sa somme magique.

La dimension du sous-espace vectoriel C_n est $n^2 - 2n + 2$.

Etude du cas $n = 3$

$$\boxed{C_3 = vect(J_3) \oplus (S_3 \cap \ker s) \oplus (A_3 \cap \ker s).}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $S_3 \cap \ker s$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $A_3 \cap \ker s$.

C_3 est bien de dimension $5 = 3^2 - 2 \times 3 + 2$.

$$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & -a+c+e & -b+c+d \\ -a-b+c+d+e & a & b \\ c & d & e \end{pmatrix} / \, a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

Etude du cas n = 3 (suite)

M est 1-magique et 2-magique

$$\Leftrightarrow M \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} / \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} / \, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

✓ Si M est 1-magique et 2-magique alors M est k-magique pour tout k>2.

✓ Il n'existe pas de matrice 1-magique et 2-magique avec 9 nombres tous distincts.

Etude du cas $n = 4$

C_4 est de dimension $4^2 - 2\times 4 + 2 = 10.$

$$C_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c+d+e+f-2g-h-i-j & -a-d+g+i+j & -b-e+g+h+j & -c-f+g+h+i \\ -a-b-c+g+h+i+j & a & b & c \\ -d-e-f+g+h+i+j & d & e & f \\ g & h & i & j \end{pmatrix} / a,b,c,d,e,f,g,h,i,j \in \mathbb{R} \right\}$$

Etude du cas n = 4 (suite)

M est 1-magique, 2-magique et 3-magique

$\Leftrightarrow$ M est formé des 4 mêmes coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne.

$$\text{Exemple: } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \\ d & c & a & b \\ b & a & d & c \end{pmatrix}.$$

- ✓ Si M est 1-magique, 2-magique et 3-magique alors M est k-magique pour tout k>3.
- ✓ Il n'existe pas de matrice 1-magique, 2-magique et 3-magique avec 16 nombres tous distincts.

Conjecture (vérifiée pour n<5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est k-magique pour tout $k \in \{1,...,n-1\}$,

alors M est formé des n mêmes coefficients

sur chaque ligne et sur chaque colonne

et donc M est k-magique pour tout $k \geq n$.

Carrés 2-magiques

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale alors
pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λM est un carré 2-magique
et sa somme 2-magique est λ^2.

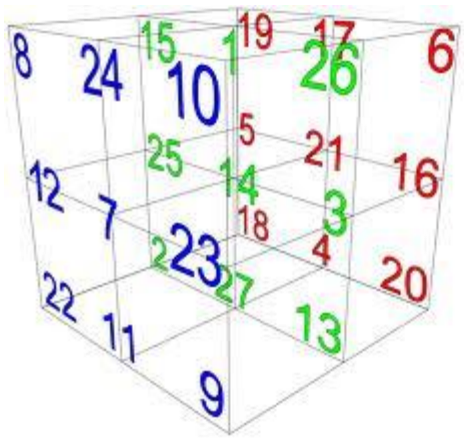
- La réciproque est fausse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ est 2-magique mais n'est pas orthogonale.

Cubes magiques

On définit les cubes magiques de la même façon que les carrés magiques.

Exemple



➢ Ce cube est 1-magique et sa somme 1-magique est 42.

➢ Ce cube 1-magique est représenté par:

$$\begin{pmatrix} 8 & 24 & 10 \\ 12 & 7 & 23 \\ 22 & 11 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & 1 & 26 \\ 25 & 14 & 3 \\ 2 & 27 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 & 17 & 6 \\ 5 & 21 & 16 \\ 18 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Cubes magiques

L'ensemble des matrices cubiques nxnxn est un espace vectoriel noté $\mathcal{M}_{nxnxn}(\mathbb{R})$.

L'ensemble des cubes 1-magiques nxnxn noté D_n

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{nxnxn}(\mathbb{R})$.

L'application $s : D_n \to \mathbb{R}$ qui à chaque cube 1-magique

associe sa somme 1-magique est linéaire.

$$D_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Cubes magiques: cas n=3

$$D_3=\left\{\begin{pmatrix} -a-b-c-d-e-f+3g+2h+2i & a+c+e-g-i & b+d+f-g-h \\ a+b+e+f-g-h-i & -a-e+g+h+i & -b-f+g+h+i \\ c+d-g & -c+g+i & -d+g+h \end{pmatrix},\right.$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d-g-h-i & -a-c+g+h+i & -b-d+g+h+i \\ -a-b+g+h+i & a & b \\ -c-d+g+h+i & c & d \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{pmatrix} e+f-g & -e+g+i & -f+g+h \\ -e-f+g+h+i & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} / a,b,c,d,e,f,g,h,i\in\mathbb{R}\right\}$$

- Un cube 1-magique et 2-magique est formé des mêmes trois coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque pile.

- Un tel cube est donc aussi k-magique pour tout $k\geq 3$.

Avec plus de temps

- Prouver la conjecture sur les carrés magiques ou trouver un contre exemple.
- Etudier plus particulièrement les carrés magiques formés d'entiers naturels.

- Déterminer la dimension de l'espace des cubes magiques.
- Prouver la conjecture sur les cubes magiques ou trouver un contre exemple.