SWAENEPOEL Cathy

L3 MATHS

Mai 2012

Maths en jeans 1

Suites et Carrés magiques

En groupe avec Jean-Baptiste MOSSE

SOMMAIRE

I. Travail de recherche sur les suites et les carrés magiques

Dans cette partie, je donne dans un premier temps des détails sur les programmes informatiques que j'ai mis au point puis, dans un second temps, je démontre les résultats principaux établis tout au long du semestre.

Les définitions et les notations employées sont celles qui sont déjà établies et utilisées dans la partie « Résumé » du cahier de groupe (pages 31 à 36).

1. Programmation

J'explique ici comment j'ai abouti à la réalisation des programmes informatiques mis au point et pour finir je résume ce travail de programmation en donnant une classification de tous les programmes établis.

Nous avons tout d'abord voulu disposer d'un programme qui donne toutes les suites 1-magiques de l'ensemble $E = \{1, ..., n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour commencer, j'ai alors réalisé un programme « naïf » dont le principe est de tester presque toutes les partitions de E en deux sous-ensembles. Mais, ce dernier a très vite montré ses limites puisqu'il n'a fonctionné que pour $n \leq 20$.

J'ai donc cherché à mettre au point un programme beaucoup plus efficace. Pour cela, j'ai utilisé le fait que chercher les suites 1-magiques de E revient à chercher à écrire la somme 1-magique de E, c'est-à-dire ici $\frac{n(n+1)}{4}$ comme une somme d'entiers de E tous distincts. Cela m'a rappelé le problème des partitions d'entiers (ce terme est défini à la page 5 du cahier de groupe). J'ai alors retrouvé dans mes cours d'informatique de Maths Sup un programme permettant de lister les partitions d'un entier (partitions_entier.ml) et un autre permettant de les dénombrer (nb_partitions_entier.ml). Ces programmes utilisent une relation par récurrence que j'ai pu adapter sans trop de difficultés afin de n'obtenir et de ne dénombrer que les partitions de la somme 1-magique avec des entiers de E tous distincts (cette nouvelle formule est donnée à la page 9 du cahier de groupe). J'ai alors écrit :

- un programme qui donne toutes les façons d'écrire $\frac{n(n+1)}{4}$ comme une somme d'entiers tous distincts de E et qui permet donc d'obtenir toutes les suites 1-magiques de E (suites_1_magiques.ml),
- un programme qui dénombre toutes les façons d'écrire $\frac{n(n+1)}{4}$ comme une somme d'entiers tous distincts de E et qui permet donc de dénombrer toutes les suites 1-magiques de E (nb suites 1-magiques.ml).

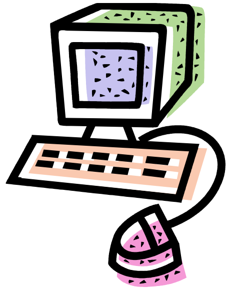
Ces deux programmes sont à la base de tous ceux que j'ai réalisés par la suite. En effet, j'ai pu ensuite les adapter afin de disposer de programmes similaires pour les suites 2-magiques et/ou 3-magiques de $\{1,...,n\}$ mais aussi pour les suites 1-magiques et/ou 2-magiques et/ou 3-magiques d'un ensemble quelconque d'entiers naturels. Par exemple, la formule de récurrence permettant de dénombrer les suites 2-magiques de $\{1,...,n\}$ est très semblable à celle qui permet de dénombrer les suites 1-magiques de $\{1,...,n\}$; elle est donnée à la page 11 du cahier de groupe.

J'ai également pu mettre au point assez facilement un programme qui, pour une liste l d'entiers naturels donnée et pour deux entiers naturels non nuls k et s donnés renvoie toutes les façons d'écrire s comme une somme (ou somme de carrés ou somme de cubes) de k éléments tous distincts de la liste l.

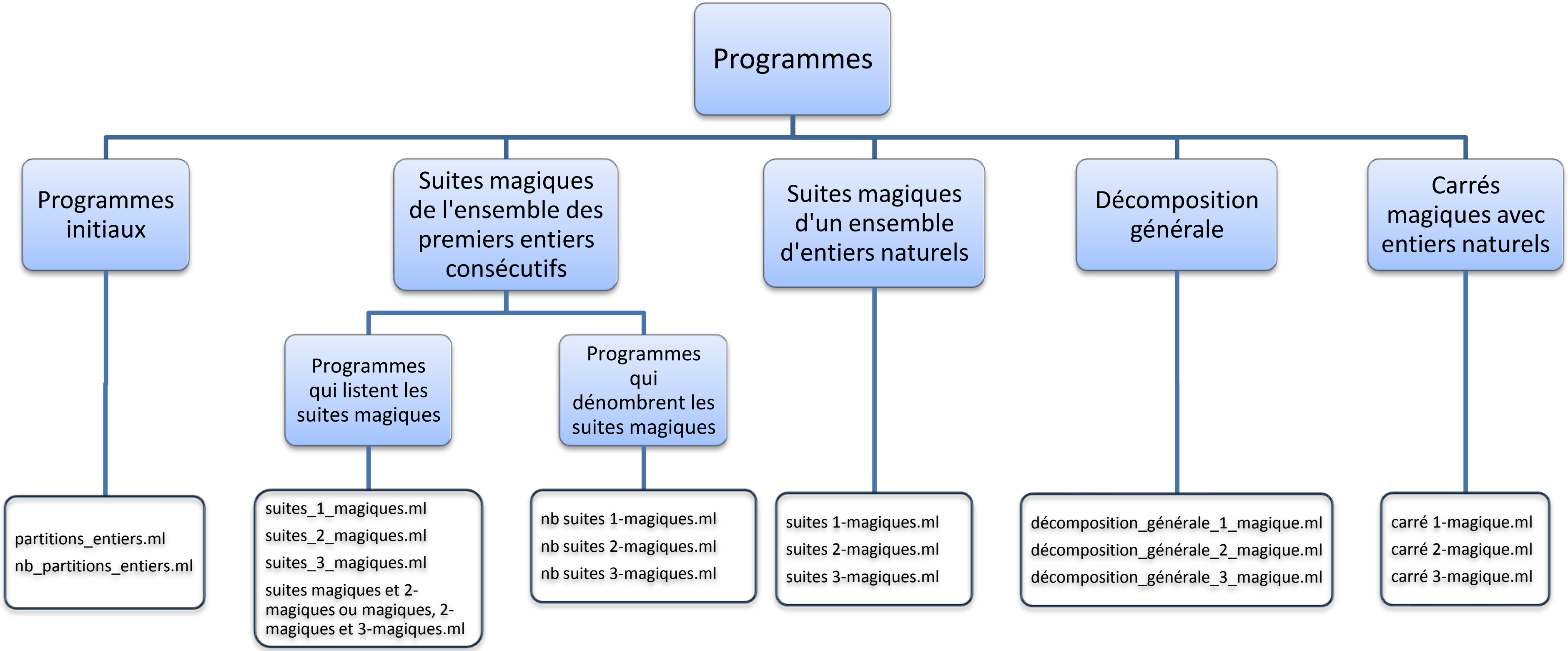
Pour finir, j'ai utilisé ce dernier programme pour connaître toutes les possibilités pour les lignes et les colonnes d'un carré 1-magique ou 2-magique ou 3-magique formé à partir d'ensemble d'entiers naturels donnés. En effet, si $E=\{x_1,...,x_{n^2}\}$, on souhaite alors connaître toutes les façons d'écrire la somme 1-magique (ou 2-magique ou 3-magique) du carré $n\times n$ formé à partir des éléments de E comme somme (ou somme de carrés ou somme de cubes) de n éléments tous distincts de l.

J'ai alors eu l'occasion d'utiliser le travail déjà réalisé sur les suites magiques pour l'étude des carrés magiques.

Avec davantage de temps, j'aurais aimé mettre au point un programme qui donne tous les carrés magiques qu'il est possible de former à partir d'un ensemble d'entiers naturels.



Classement des programmes réalisés



2. Résultats sur les suites magiques

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\{1,\dots,n\}$ admet une suite 1-magique ou 2-magique ou 3-magique alors $n \equiv 0(4)$ ou $n \equiv 3(4)$.

Preuve : Montrons que : $\forall k \in \{1,2,3\}$, $S_E^{(k)} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \equiv 0(4)$ ou $n \equiv 3(4)$

1^er cas : $k = 1$. Alors $S_E^{(k)} = \dfrac{n(n+1)}{4}$.

Si $n \equiv 0(4)$ ou $n \equiv 3(4)$ alors $n(n+1) \equiv 0(4)$ et si $n \equiv 1(4)$ ou si $n \equiv 2(4)$ alors $n(n+1) \equiv 2(4)$.

2^ème cas : $k = 2$. Alors $S_E^{(k)} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

Si $n \equiv 0(12)$ ou $n \equiv 3(12)$ ou $n \equiv 4(12)$ ou $n \equiv 7(12)$ ou $n \equiv 8(12)$ ou $n \equiv 11(12)$ (c'est-à-dire si $n \equiv 0(4)$ ou $n \equiv 3(4)$) alors $n(n+1)(2n+1) \equiv 0(12)$ et si $n \equiv 1(12)$ ou $n \equiv 2(12)$ ou $n \equiv 5(12)$ ou $n \equiv 6(12)$ ou $n \equiv 9(12)$ ou $n \equiv 10(12)$ (c'est-à-dire si $n \equiv 1(4)$ ou $n \equiv 2(4)$) alors $n(n+1)(2n+1) \equiv 6(12)$.

3^ème cas : $k = 3$. Alors $S_E^{(k)} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{8}$.

Si $n \equiv 0(4)$ ou $n \equiv 3(4)$ alors $n^2(n+1)^2 \equiv 0(16)$ et donc $n^2(n+1)^2 \equiv 0(8)$ et si $n \equiv 1(4)$ ou si $n \equiv 2(4)$ alors $n^2(n+1)^2 \equiv 4(16)$ et donc $n^2(n+1)^2 \equiv 4(8)$.

$\blacksquare$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $n \equiv 0(4)$ ou $n \equiv 3(4)$, alors $\{1,\dots,n\}$ admet une suite 1-magique.

Preuve :

1[er] *cas* : $n \equiv 0(4)$

On pose $p = \dfrac{n}{2} \in 2\mathbb{N}$. Alors $S_E^{(1)} = \dfrac{n(n+1)}{4} = 1+3+5+...+(p-1)+(p+2)+(p+4)+...+2p$.

En effet :

$$1+3+5+...+(p-1)+(p+2)+(p+4)+...+2p = \sum_{k=0}^{p/2-1} 2k+1+\sum_{k=0}^{p/2-1} 2(p-k) = \frac{p}{2}+2p\frac{p}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

2[ème] *cas* : $n \equiv 3(4)$

On pose $p = \dfrac{n-3}{4} \in \mathbb{N}$. Alors $S_E^{(1)} = \dfrac{n(n+1)}{4} = 1+2+...+p+(n-p)+(n-p+1)+...+n$.

En effet : $1+2+...+p+(n-p)+(n-p+1)+...+n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k + \sum_{k=0}^{p} n-k = n+pn = \frac{n(n+1)}{4}$.

∎

3. Résultats sur les carrés magiques

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. C_n est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application s qui à chaque carré magique M associe sa somme magique $s(M)$ est un morphisme d'algèbre.

Preuve :

Clairement, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in C_n$ et $s(I_n) = 1$.

Ensuite, pour $M, N \in C_n$ et pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

pour tous $i, j \in \{1,...,n\}$, $(\lambda M + \mu N)_{i,j} = \lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j}$ et donc en posant $P = \lambda M + \mu N$, on a :

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} + \mu \sum_{j=1}^{n} n_{i,j} = \lambda s(M) + \mu s(N)$ et

pour tout $\mathrm{j} \in \{1,\dots,n\}, \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda m_{i,j} + \mu n_{i,j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} + \mu \sum_{i=1}^{n} n_{i,j} = \lambda s(M) + \mu s(N)$, donc P est un carré magique et $s(P) = \lambda s(M) + \mu s(N)$.

Enfin, pour $M, N \in C_n$, on a : pour tous $i, j \in \{1,\dots,n\}$, $(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}$ et donc en posant $P = MN$, on a :

pour tout $i \in \{1,\dots,n\}, \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \sum_{j=1}^{n} n_{k,j} = s(N) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = s(M)s(N)$ et

pour tout $\mathrm{j} \in \{1,\dots,n\}, \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} n_{k,j} \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} = s(M) \sum_{k=1}^{n} n_{k,j} = s(M)s(N)$ donc P est un carré magique et $s(P) = s(M)s(N)$.

▪

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On pose $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, et on note S_n le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et A_n le sous espace-vectoriel des matrices antisymétriques.

On a $C_n = vect(J_n) \oplus (S_n \cap \ker s) \oplus (A_n \cap \ker s)$.

Preuve :

Montrons tout d'abord que $C_n = vect(J_n) \oplus \ker s$.

Soit $M \in C_n$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \ker s$ tels que $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{J}_n + N$, alors $s(M) = \lambda$ et $N = M - s(M)J_n$. Réciproquement, en prenant $\lambda = s(M) \in \mathbb{R}$ et $N = M - s(M)J_n \in \ker s$, on a bien $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{J}_n + N$. Donc $C_n = vect(J_n) \oplus \ker s$.

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$ donc $\ker s = (S_n \cap \ker s) \oplus (A_n \cap \ker s)$.

▪

Remarque

Cette décomposition de C_n en somme directe de sous-espaces vectoriels a un intérêt pratique. En effet, sans ce résultat, pour connaître l'ensemble C_n, il faut résoudre un système linéaire de $2n-1$ équations à n^2 inconnues.

Par exemple pour connaître C_3, il faut résoudre pour $a,b,c,d,e,f,g,h,i \in \mathbb{R}$, le système $a+b+c=d+e+f=g+h+i=a+d+g=b+e+h=c+f+i$ qui est en fait le système de 5 équations à 9 inconnues $\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ a+b+c=g+h+i \\ a+b+c=a+d+g \\ a+b+c=b+e+h \\ a+b+c=c+f+i \end{cases}$.

Mais, connaissant le résultat précédent, il suffit de déterminer une base de $S_n \cap \ker s$ et une base de $A_n \cap \ker s$. Il y a certes deux systèmes à résoudre mais le nombre d'inconnues est moins élevé. Par exemple, $S_3 \cap \ker s = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+e+f=0 \\ c+f+i=0 \end{cases} \right\}$ et $A_3 \cap \ker s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \begin{cases} b+c=0 \\ -b+f=0 \\ c+f=0 \end{cases} \right\}$. Ainsi, pour connaître une base de $S_3 \cap \ker s$, il faut résoudre le système de 3 équations à 5 inconnues $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+e+f=0 \\ c+f+i=0 \end{cases}$ et pour obtenir une base de $A_3 \cap \ker s$, il faut résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues $\begin{cases} b+c=0 \\ -b+f=0 \\ c+f=0 \end{cases}$, ce qui est beaucoup plus pratique à faire à la main.

Finalement, on obtient $\boxed{C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c & -a+c+e & -b+c+d \\ -a-b+c+d+e & a & b \\ c & d & e \end{pmatrix} / a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}}$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

$$\dim C_n = n^2 - 2n + 2.$$

Preuve :

Soient $H = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + ... + x_n = 0\}$ et $K = \{(x,...,x) \in \mathbb{R}^n\}$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note φ_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Montrons tout d'abord que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $M \in C_n \Leftrightarrow H$ et K sont stables par φ_M.

Notons que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- H est stable par $\varphi_M \Leftrightarrow \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + ... + x_n = 0,\ M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H$

  $\Leftrightarrow \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + ... + x_n = 0,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0$

- K est stable par $\varphi_M \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, M\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \in K \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \{2,...,n\},\ \mathrm{x}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \mathrm{x}\sum_{j=1}^{n} m_{1,j}$

  $\Leftrightarrow \forall i \in \{2,...,n\},\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} m_{1,j}$

Si $M \in C_n$, il apparait alors clairement que H et K sont stables par φ_M.

Réciproquement, supposons que H et K sont stables par φ_M.

La stabilité de K par φ_M implique que la somme des coefficients de chaque ligne de M est constante disons à l. Puis, comme H est stable par φ_M, on a : $\forall j \in \{2,...n\},\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} - \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0$ ou encore $\forall j \in \{2,...n\},\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$, ce qui implique que la somme des coefficients de chaque colonne de M est constante disons à c.

Mais alors, on a aussi $nc = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = nl$ et donc $c = l$. D'où $M \in C_n$.

Par ailleurs, $C_n = (C_n \cap S_n) \oplus (C_n \cap A_n)$. Pour déterminer la dimension de C_n, il faut alors déterminer la dimension de $C_n \cap S_n$ puis celle de $C_n \cap A_n$.

Or, $C_n \cap S_n$ (respectivement $C_n \cap A_n$) est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques (respectivement antisymétriques) telles que H et K soient stables par φ_M.

Mais, l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que H et K soient stables par φ_M a pour dimension $1 + \frac{n(n-1)}{2}$ et l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques telles que H et K soient stables par φ_M a pour dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Ainsi, $\dim C_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n^2 - 2n + 2.$

■

Remarque

Connaître la dimension de C_n est intéressant car cela permet de connaître à l'avance le nombre de variables nécessaires pour décrire C_n : pour $n = 3$, il en faut $3^2 - 2\times 3 + 2 = 5$, pour $n = 4$, il en faut déjà $4^2 - 2\times 4 + 2 = 10$ et pour $n = 5$, il en faut $5^2 - 2\times 5 + 2 = 17$, ce qui laisse imaginer la longueur des calculs.

Propriété

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$M \in C_3 \text{ et } M \text{ est 2-magique} \Leftrightarrow M \in \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} / a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Preuve :

Si $M \in C_3$, alors il existe $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ tels que $M = \begin{pmatrix} a+b-c & -a+c+e & -b+c+d \\ -a-b+c+d+e & a & b \\ c & d & e \end{pmatrix}$.

Si M est de plus 2-magique, alors

$$(a+b-c)^2+(-a+c+e)^2+(-b+c+d)^2=(-a-b+c+d+e)^2+a^2+b^2=c^2+d^2+e^2$$

$$=(a+b-c)^2+(-a-b+c+d+e)^2+c^2=(-a+c+e)^2+a^2+d^2=(-b+c+d)^2+b^2+e^2.$$

Après développement, simplification et factorisation, on obtient :

$$\begin{cases} (b-d)(a-e)=0 \\ (b-c)(a-c)=0 \\ (a+b-c-e)(a+b-c-d)=0 \\ (a-c)(a+b-c-e)=0 \\ (b-c)(a+b-c-d)=0 \end{cases}$$

Puis, en distinguant plusieurs cas, on arrive à la solution.

Réciproquement, c'est évident.

▪

Propriété

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale (ou encore de manière équivalente si $\det M = \pm 1$) alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λM est un carré 2-magique.

Preuve :

Comme M est orthogonale, les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Il en est de même des vecteurs lignes de M. Alors, la norme de chacun des vecteurs lignes et des vecteurs colonnes de M vaut 1. Donc, la norme de chacun des vecteurs lignes et des vecteurs colonnes de λM vaut $|\lambda|$. On conclut en remarquant que la norme au carré d'un vecteur est la somme des carrés de ses coefficients.

▪

II. Bilan de l’UE Maths en jeans 1

1. Sur le sujet du travail de recherche

Une des raisons pour lesquelles j’ai choisi le sujet « Suites et carrés magiques » est que je voulais faire de l’arithmétique. Finalement, il a surtout été question d’algèbre linéaire puisque l’approche arithmétique n’a rien donné ! Je m’attendais également à attaquer le problème des carrés magiques comme une généralisation du problème des suites magiques. Finalement, les deux notions n’avaient pas de liens assez forts pour cela et c’est sur le problème des carrés magiques, pourtant à priori plus compliqué, que j’en appris le plus. Il est intéressant de remarquer que ce à quoi nous avons abouti n’est pas ce que j’avais imaginé au début.

Cela a rendu mes recherches encore plus intéressantes. J’y ai d’ailleurs passé beaucoup de temps. Mais ce qui m’a demandé le plus de temps et qui m’a beaucoup intéressée, c’est le travail de programmation. En effet, n’ayant plus programmé depuis presque deux ans et ayant eu des cours d’informatique uniquement 5 mois, j’ai du m’y mettre sérieusement et cela a été l’occasion de ressortir mes cours.

Les suites et les carrés magiques m’ont donc beaucoup intéressée et il y a de nombreux points que j’aurais aimé pouvoir étudier avec davantage de temps.

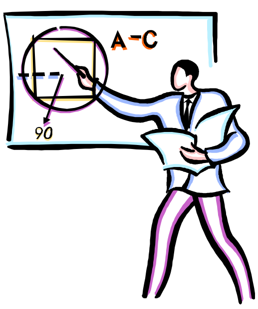
Enfin, j’ai apprécié l’aspect « libre » du travail de recherche. Même si cela a été parfois compliqué car je ne voyais pas comment aborder le problème, j’ai finalement réussi à trouver une solution après un temps plus ou moins long. J’ai aussi remarqué que le fait de mettre tout le travail effectué au propre afin de présenter le premier diaporama a soulevé de nombreuses questions et a été l’occasion de faire de nouvelles remarques.

2. Sur le travail en groupe

Dès le début, nous nous sommes organisés. Pendant la semaine, nous devions faire des recherches et étudier les problèmes soulevés lors de la dernière séance de TD. Chaque séance de TD était l’occasion de s’expliquer mutuellement le travail réalisé lors de la semaine et de nous poser les nouvelles bonnes questions. Nous ne nous sommes pas souvent répartis les tâches. En effet, nous avons préféré pouvoir confronter ce que nous avions fait sur le même sujet et avoir la vision la plus large possible du problème. Nous nous sommes également tous les deux investis dans notre travail commun. En conclusion, je peux donc dire que notre travail en groupe a bien fonctionné.

3. Sur les cours

Les sujets choisis et présentés ont été très intéressants. J’ai trouvé cette façon d’aborder certains sujets mathématiques assez ludique et bien qu’étant en L3, j’ai quand même appris de nouvelles choses. J’aurais bien aimé qu’il y ait eu encore plus de sujets présentés.



III. Bilan du forum des Mathématiques à Aix-en-Provence le 16 Janvier 2012

Organisé par l'association Maths pour tous en partenariat avec les clubs Rotary du pays d'Aix, ce forum a réuni d'une part certains collégiens, lycéens, étudiants et chercheurs venus présenter leur sujet et d'autre part, de nombreux collégiens, lycéens et enseignants mais aussi de nombreuses autres personnes venues les écouter.

Ouvert au grand public, ce forum avait pour but de montrer l'utilité des mathématiques à ceux qui en doutaient encore et de leur faire découvrir de belles mathématiques.

Les visiteurs ont ainsi pu lire de nombreux posters, se rendre sur différents stands et écouter les élèves ou les chercheurs présenter leur travail. Ils ont aussi eu l'occasion de faire des casse-têtes ou encore par exemple des jeux logiques dans le cadre des récréations mathématiques et ceux qui le souhaitaient pouvaient également participer à des défis. Enfin, tout au long de la journée, une dizaine de conférences ouvertes au grand public et aux scolaires se sont déroulées.

En tant qu'étudiante en mathématiques, j'y ai retrouvé des sujets que je connaissais déjà tels que le problème des ponts de Königsberg ou encore l'hôtel infini pour tenter de comprendre l'infini. Mais, j'y ai aussi découvert de nombreux nouveaux sujets.

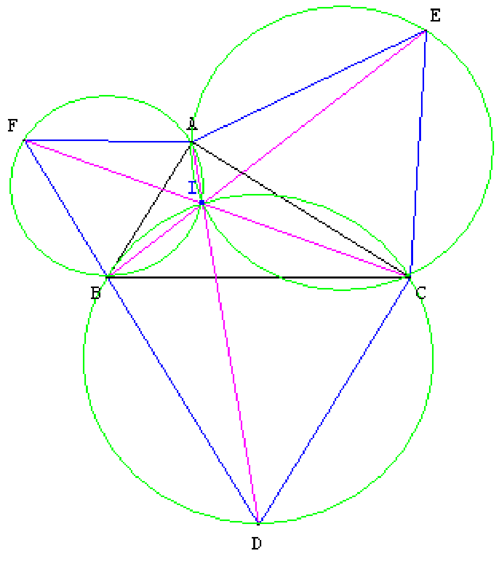
La conférence de Dominique Barbolosi m'a beaucoup intéressée car elle m'a fait découvrir une application des mathématiques en médecine que j'ignorais totalement.

Enfin, parmi les stands, celui qui m'a le plus intéressée est celui sur le savon et le plus court chemin sur un polygone. D'ailleurs, les élèves de $1^{\text{ère}}$ S qui sont à l'origine de cette présentation ont remporté un prix au concours « Faites de la science » en 2010. Le problème posé était celui du plus court chemin reliant tous les sommets d'un polygone. Ce que j'ai appris et que j'ai trouvé très intéressant, c'est que l'on peut obtenir un tel chemin simplement en formant un film de savon entre les sommets du polygone. Pour présenter leur travail, les élèves ont réalisés trois posters :

- Le premier explique le problème et le cas particulier où le polygone considéré est un triangle. On y découvre que si ABC est un triangle où aucun angle n'est supérieur à 120°, alors le point M tel que AM+BM+CM soit minimale est tel que les angles $\widehat{AMB}, \widehat{AMC}$ et $\widehat{BMC}$ soient tous égaux à 120°. Les élèves en proposent également une belle démonstration sur ce même poster. On apprend également que ce point M est appelé le point de Torricelli (ou encore point de Fermat).

- Le deuxième poster explique le cas où le polygone a au moins quatre sommets. On apprend alors qu'il ne faut plus un seul point M à l'intérieur du polygone mais au moins deux. Dans le cas général, les élèves n'avaient pas encore trouvé les propriétés de ces points mais de nombreuses photos des expériences réalisées avec du savon permettaient d'illustrer ce qu'il se passe avec de tels polygones.
- Enfin, le troisième poster présentait les applications de ce problème pour l'optimisation des réseaux de transports par exemple.

J'ai trouvé ce stand très attractif, les posters très bien réalisés et très colorés ne demandaient qu'à être lus, les élèves ont très bien expliqué leur sujet. Néanmoins, j'aurais bien aimé savoir en quelques mots (car cela ne relève pas des maths mais de la physique) pourquoi le savon trouve les chemins que l'on recherche ici. Enfin, j'aurais bien aimé également qu'une méthode géométrique soit présentée pour trouver le point de Torricelli dans le cas où le polygone est un triangle. Après quelques recherches sur Wikipédia, j'ai trouvé une telle méthode utilisant uniquement une règle et un compas.



Etant donné un triangle ABC dont aucun angle n'est supérieur à 120°, on construit les points D, E et F tels que les triangles BCD, ACE et ABF soient équilatéraux. On construit alors les cercles circonscrits à ces trois triangles ; ceux-ci s'intersectent en I qui est le point de Torricelli.

Enfin, pour conclure, même si la séance de remerciements à la fin de la première conférence m'a semblé trop longue, j'ai trouvé ce forum des mathématiques (le premier auquel j'assistais) très intéressant.

FIN