Rapport personnel de Maths en Jeans

Jean-Baptiste Mossé
L2 Prépa Maths

Mai 2012

Table des matières

1 Suites et Carrés Magiques **2**
1.1 Carrés magiques et Sous-Algèbre 2
1.2 Dimension et Base du sous-espace vectoriel des Carrés Magiques 4
1.2.1 Cas particulier 5
1.2.2 Retour au cas général 7

2 Compte-rendu **9**
2.1 Puissance du Dénombrable 9
2.2 Hôtel de Hilbert 10
2.3 Procédé de Diagonalisation de Cantor et Puissance du Continu 11
2.4 Hypothèse du Continu 11
2.5 Conclusion 12

3 Bilan d'expérience **13**

4 Défis **15**
4.1 Le Jeu de Joseph 15
4.2 Somme des chiffres 17
4.3 Devine-Surface 18

Chapitre 1

Suites et Carrés Magiques

Concernant ce sujet, je me suis pour ma part surtout intéressé aux propriétés algèbriques des carrés magiques et à la généralisation qu'on pouvait en faire.

1.1 Carrés magiques et Sous-Algèbre

Rappels et notations : On appelle **carré magique** $n * n$ toute matrice carrée de taille $n * n$ dont la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne est égale à une même valeur. On appelle **somme magique** cette valeur commune et on la note $s(M)$.

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des carrés magiques de taille $n * n$.

Commençons par prouver plusieurs propriétés intéressantes des carrés magiques. Cette partie nous montrera que si l'on connaît un carré magique, il est toujours possible d'en construire d'autres.

Théorème 1.1.1. *$\mathscr{M}$ est une sous-algèbre de l'ensemble des matrices $n * n$, $M_n(\mathbb{Z})$, et s(M) est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. On rappelle qu'une sous-algèbre de $n * n$, $M_n(\mathbb{Z})$ est un sous-espace vectoriel doublé d'un sous-anneau, c'est-à-dire un sous-ensemble de $n * n$, $M_n(\mathbb{Z})$ stable par combinaisons et par multiplication.
. Un morphisme d'algèbres est à la fois une application linéaire, et un morphisme d'anneaux (une application entre deux anneaux compatible avec leurs lois et qui envoie le neutre multiplicatif de l'un sur celui de l'autre).

Soit A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Alors :

- s(I)=1
- $\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} & ... & \alpha a_{1n} + \beta b_{1n} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} & ... & \alpha a_{2n} + \beta b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \alpha a_{n2} + \beta b_{n2} & ... & \alpha a_{nn} + \beta b_{nn} \end{pmatrix}$

Et, après mise en facteur, on voit bien que la somme de chaque ligne et de chaque colonne est constante, et est égale à $\lambda \cdot s(A) + \beta \cdot s(B)$.

- $AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{in} \end{pmatrix}$

  Et la somme des coefficients de la j-ième ligne est égale à
  $$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}b_{i1} \cdot (\sum_{j=1}^{i=n} b_{ij}b_{i1}) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ji}b_{i1} \cdot (s(B)) = s(A) \cdot s(B).$$
  (On en déduit que toute puissance d'un carré magique est un carré magique.)

  On a donc prouvé que $\mathscr{M}$ est sous-algèbre de $M_n(\mathbb{Z})$.

□

Théorème 1.1.2. *Si X est une matrice magique inversible et si s(X) $\neq$ 0, alors X^{-1} est également magique, et $s(X^{-1}) = \frac{1}{s(X)}$.*

Démonstration. Soit J la matrice $n * n$ ne contenant que des 1. Alors

$$J \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} x_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} x_{in} \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} x_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} x_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} x_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} x_{in} \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } X \cdot J = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{i=n} x_{1i} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} x_{1i} \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{i=n} x_{2i} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} x_{2i} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_{ni} & \sum_{i=1}^{i=n} x_{ni} & ... & \sum_{i=1}^{i=n} x_{ni} \end{pmatrix}$$

$$\text{Si X est magique, on a donc } X \cdot J = J \cdot X = \begin{pmatrix} s(M) & s(M) & ... & s(M) \\ s(M) & s(M) & ... & s(M) \\ ... & ... & ... & ... \\ s(M) & s(M) & ... & s(M) \end{pmatrix} = s(X) \cdot J.$$

Donc si X est inversible : $J = s(M) \cdot M^{-1}U = s(M) \cdot UM^{-1} \Leftrightarrow M^{-1}U = UM^{-1} = \frac{1}{s(M)}U \Leftrightarrow$ M^{-1} est magique et $s(M^{-1}) = \frac{1}{s(M)}$.

□

1.2 Dimension et Base du sous-espace vectoriel des Carrés Magiques

On a montré précédemment que les carrés magiques $n * n$ tels que nous les avons définis forment une sous-algèbre de l'ensemble des matrices $n * n$. Il forment donc évidemment un sous-espace vectoriel de cet ensemble. La question que l'on se pose maintenant est de savoir la dimension de ce sous-espace.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $x_i(A)$ la somme des coefficients de la i-ème ligne de A et $y_i(A)$ la somme des coefficients de la i-ème colonne de A. Pour tout i $\in [1, n-1]$, on définit les formes linéaires $X_i(A) = x_i(A) - x_n(A)$ et $Y_i(A) = y_i(A) - y_n(A)$. Ces (n-1)+(n-1) = **(2n-2)** formes sont donc toutes nulles dans le cas de carrés magiques.

De plus, elles sont indépendantes. On sait que l'espace dual de $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, a la même dimension que $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ donc $\boldsymbol{n^2}$. Or, grâce au *théorème de la base incomplète*, on peut compléter les formes linéaires X_i et Y_i en une base de l'espace dual. Cette base sera donc composée de n^2 formes linéaires.
Les (2n-2) formes linéaires étant toutes nulles pour les carrés magiques, on en déduit que la dimension de l'espace dual de l'espace vectoriel des carrés

Finalement, **la dimension du sous-espace vectoriel des carrés magiques est de**

$$\boldsymbol{n^2 - 2n + 2}$$

Cherchons-en maintenant une base.

Théorème 1.2.1. *On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Avec toujours s la somme magique et J=* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$*, on a*

$$\mathscr{M} = Vect(J) \bigoplus (\mathscr{S} \cap Ker(s)) \bigoplus (\mathscr{A} \cap ker(s)).$$

Démonstration. On sait que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S} \bigoplus \mathscr{A}$, donc en prenant l'intersection avec ker(s), on aboutit à $ker(s) = (\mathscr{S} \cap ker(s)) \bigoplus (\mathscr{A} \cap ker(s))$.

On peut aussi montrer que toute matrice M $\in \mathscr{M}$ s'écrit de manière unique comme $M = \alpha * J + Q$, avec Q une matrice magique telle que s(Q)=0 :

- Unicité : Si M possède une telle écriture, alors on a $s(M) = \alpha * s(J) + s(Q)$ par linéarité de la somme magique. Or s(J)=n et s(Q)=0, donc $s(M) = \alpha * n$. Alors on peut définir $Q = M - \frac{s(M)}{n}$ donc cette écriture est unique.

- Existence : On a $s(M - \frac{s(M)}{n} J) = s(M) - \frac{s(M)}{n} s(J) = s(M) - s(M) = 0$. Donc l'écriture existe. Et on en déduit que $M - \frac{s(M)}{n} J \in ker(s)$.

En écrivant toute matrice $M \in \mathscr{M}$ comme $M = M - \frac{s(M)}{n} J + \frac{s(M)}{n} J$, et étant donné que $M - \frac{s(M)}{n} J \in ker(s)$, on en déduit que $\mathscr{M} = ker(s) \cap Vect(J)$.

Enfin, comme $ker(s) = (\mathscr{S} \cap ker(s)) \bigoplus (\mathscr{A} \cap ker(s))$, on aboutit à :

$$\mathscr{M} = Vect(J) \bigoplus (\mathscr{S} \cap Ker(s)) \bigoplus (\mathscr{A} \cap ker(s)).$$

□

1.2.1 Cas particulier

On va maintenant étudier le sous-espace vectoriel des Carrés Magiques auquels on rajoute une condition : il faut que les sommes des coefficients des deux diagonales soient elles-aussi

égales à la somme magique. Cette condition rajoute donc une contrainte, réduit la dimension du sous-espace, et va nous permettre de le définir avec plus grande facilité.

On note $\mathscr{M}_+$ ce nouveau sous-espace vectoriel.

A cause du rajout des deux nouvelles équations, la dimension de $\mathscr{M}_+$ est de $n^2 - 2n + 2 - 2 = n^2 - 2n$, pour $n \geq 3$ (un petit système nous montre que les seuls carrés magiques 2*2 en comptant les diagonales sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc la dimension de $\mathscr{M}_+$ dans ce cas-là est de 1.)

Toute matrice antisymétrique A ne possède que des zéros sur sa diagonale. La nouvelle condition imposée sur les diagonales implique que sa somme magique est nulle. On a donc $(\mathscr{A} \cap \mathscr{M}_+) \subset (\mathscr{A} \cap ker(s))$. Comme de plus $(\mathscr{A} \cap ker(s)) \subset (\mathscr{A} \cap \mathscr{M}_+)$ on a donc une égalité. La formule trouvée précédemment peut donc être remplacée par :

$$\mathscr{M}_+ = Vect(J) \bigoplus (\mathscr{S} \cap Ker(s)) \bigoplus (\mathscr{A} \cap \mathscr{M}_+)$$

On se place par exemple dans le cas des matrices $3 * 3$:

- Soit $A \in (\mathscr{A} \cap \mathscr{M}_+) \Leftrightarrow$ A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} -a-b &= 0 \\ a-c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ a+b &= 0 \\ -a+c &= 0 \\ -b-c &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -b+b &= 0 \end{cases}$

  Ce qui équivaut à a = c=-b.

  En conséquence, $A \in (\mathscr{A} \cap \mathscr{M}_+) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- De même, Soit $S \in (\mathscr{S} \cap ker(s)) \Leftrightarrow$ S est de la forme $\begin{pmatrix} d & a & b \\ a & e & c \\ b & c & f \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} d+a+b &= 0 \\ a+e+c &= 0 \\ b+c+f &= 0 \\ d+e+f &= 0 \\ 2b+e &= 0 \end{cases}$

Ce qui aboutit à : $\begin{cases} a = f = -c = -d \\ b = e = 0 \end{cases}$

En conséquence, $S \in (\mathscr{S} \cap ker(s)) \Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ a & 0 & -a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

D'après la formule de $\mathscr{M}_+$, on en déduit que

$$\mathscr{M}_+ = Vect(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix})$$

et donc que toute matrice M $\in \mathscr{M}_+$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta+\gamma & \alpha-\gamma \\ \alpha-\beta-\gamma & \alpha & \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+ & \alpha+\beta-\gamma & \alpha-\beta+ \end{pmatrix}$

1.2.2 Retour au cas général

Pour trouver une base dans le cas général, on effectue la même procédure ; le seul changement concernera la forme des matrices $S \in (\mathscr{S} \cap ker(s))$, les deux autres étapes n'ayant précédemment pas été affectées par le rajout des conditions.

Dans ce cas donc, $S \in (\mathscr{S} \cap ker(s)) \Leftrightarrow$ S est de la forme $\begin{pmatrix} d & a & b \\ a & e & c \\ b & c & f \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} d+a+b &= 0 \\ a+e+c &= 0 \\ b+c+f &= 0 \end{cases}$

Il y a donc trois variables libres, donc 3 matrices indépendantes qui engendrent $(\mathscr{S} \cap ker(s))$.

On obtient par exemple S = $\begin{pmatrix} d & -d-b & b \\ -d-b & d+b-c & c \\ b & c & -b-c \end{pmatrix}$

$$= d * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + c * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Au final, en reprenant les bases de Vect(J) et de $(\mathscr{A} \cap \mathscr{M}_+) = (\mathscr{A} \cap ker(s))$ trouvées précédemment, on obtient :

$$\mathscr{M} = Vect(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix})$$

Ces deux exemples ont bien vérifié les dimensions ($n^2 - 2n$ dans un cas, $n^2 - 2n + 2$ dans l'autre) trouvées précédemment.

Chapitre 2

Compte-rendu

On fera ici le compte-rendu des exposés sur l'Infini - ou plutôt "les" Infinis - qui ont été proposés durant les séances de cours.

2.1 Puissance du Dénombrable

Depuis le collège, on n'a cessé de nous introduire à des ensembles composés d'une infinité de termes : l'ensemble des entiers naturels, puis celui des entiers relatifs, des rationnels, des réels... Tous ces ensembles ont beau être "infinis", notre intuition première tendrait tout de même à les distinguer ; à prêter un plus grand nombre d'élements aux réels qu'aux entiers naturels, par exemple. Qu'en est-il vraiment ? N'y a-t-il qu'une sorte d'infini, ou "des" infinis ?

Pour pouvoir comparer des ensembles, on utilise les bijections. On rappelle qu'une fonction f est une bijection si tout élément de son ensemble d'arrivée admet un et un seul antécédent par f. Lorque deux ensembles sont en bijection, ils ont donc nécessairement le même *cardinal*, c'est-à-dire le même nombre d'éléments pour des ensembles finis, et pour des ensembles infinis on dira qu'ils ont la même *puissance*.

On dit qu'un ensemble infini a la **puissance du dénombrable** s'il existe une bijection entre celui-ci et $\mathbb{N}$.

On peut prouver, en trouvant à chaque fois la bijection appropriée, que l'ensemble des entiers pairs ou impairs, et $\mathbb{Z}$ ont tous la puissance du dénombrable. Par exemple, pour $\mathbb{Z}$, on crée la fonction f qui, pour tout entier naturel n, associe $-\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Il est facile de voir qu'on a ainsi pris en compte tous les entiers relatifs, et donc que f est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ a donc la puissance du dénombrable.

Déterminer si l'ensemble $\mathbb{Q}$ a la puissance du dénombrable est un peu plus complexe et utilise une notion célèbre, celle de l'Hôtel Infini de Hilbert.

2.2 Hôtel de Hilbert

Sur une planète, il existe une infinité d'hôtels, chacun ayant une infinité de chambres. Un voyageur entre dans l'un d'eux et demande une chambre. Le concierge lui répond qu'ils sont complets. Il y a néanmoins une solution : on demande à chaque voyageur de changer de chambre : le voyageur occupant la chambre 0 ira dans la chambre 1, celui de la 1 se retrouvera dans la 2, etc... Au final, l'hôtel étant infini, tous les voyageurs déjà présents occuperont toujours une chambre, et le nouveau venu pourra se loger dans la chambre 0 libérée !

Un autre problème se poserait s'il fallait recevoir une infinité de clients dans un hôtel infini déjà complet. Une solution serait de reloger les voyageurs de cette façon : le voyageur occupant la chambre 1 ira dans la chambre 2, celui de la 2 ira dans la 4, celui de la 3 dans la 6... Ainsi, ce seront maintenant uniquement les chambres paires qui seront prises, et l'infinité de chambres impaires libérées permettra d'accueillir une infinité de personnes !

On peut également ramener les infinités d'infinité de clients d'une infinité d'hôtel dans un seul hôtel infini.

	1	2	3	4
1	1	3	4	10
2	2	5	9	··
3	6	8	··	··
4	7	··	··	··

Avec la première colonne représentant le numéro de l'hôtel et la première ligne celle des chambres. On a donc associé à chaque client de chaque hôtel une nouvelle chambre dans un hôtel commun.

Maintenant, on veut construire notre bijection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Il suffit de considérer dans le tableau précédent que l'hôtel, donc la ligne, représente un dénominateur et le numéro de chambre originel, donc la colonne, un numérateur. Le problème est que certaines fractions aboutiront au même résultat, par exemple le voyageur 1 dans l'hôtel 2 et le voyageur 2 dans l'hôtel 4 qui

donneront tous deux 1/2. Il suffit dans l'énumération créée de prendre en compte un décalage à chaque occurence de ce problème.

Au final, les ensembles des nombres entiers naturels, relatif, pairs, impairs et rationnels ont tous la puissance du dénombrable ! On notera $\aleph_0$ leur cardinal commun.

2.3 Procédé de Diagonalisation de Cantor et Puissance du Continu

Pour montrer la non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$ il suffit de montrer celle de l'intervalle [0,1].

On construit une suite de nombres appartenant à l'intervalle [0,1], composés d'une infinité de chiffres après la virgule. On les représente les uns au-dessous des autres, par exemple :

0,012451021591920320321561...
0,**5**16202302616549846130026...
0,1**9**4945412313218649122 54...
0.49**9**946162123100054161 23...
0.159**1**8451231115864633318...
0.1565**6**123030215615615614...

Quelle que soit le nombre de lignes que l'on aura écrites, il y aura toujours un nombre de [0,1] n'appartenant pas à cette liste.

Pour prouver ceci, il suffit de construire un nouveau nombre, en prenant les décimales situées sur la diagonele. On rajoute ensuite 1 à chacun de ses décimales (et on remplace les 9 par des 0). Ce nombre ne peut exister dans la liste ! En effet, il ne peut pas être égal au premier nombre de la liste à cause de sa première décimale, ni au deuxième à cause de sa deuxième décimale, etc...

L'ensemble [0,1] n'est pas dénombrable et donc l'ensemble $\mathbb{R}$ non plus. On dit que $\mathbb{R}$, qui a alors un cardinal plus grand que $\aleph_0$, possède la **puissance du continu**, et on note $\aleph_1$ son cardinal.

2.4 Hypothèse du Continu

On a donc vu qu'il existe deux infinis, représentés par $\aleph_0$ et $\aleph_1$. Mais ce n'est pas fini ! On peut aussi considérer le cardinal de l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ que l'on nommera $\aleph_2$, et en

continuant ainsi, définir $\aleph_3$, $\aleph_4$.... !

La question qu'on se pose maintenant est de savoir s'il existe un ensemble moins puissant que le continu est plus puissant que le dénombrable, c'est-à-dire dont le cardinal serait strictement compris entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$. L'hypothèse qu'un tel ensemble n'existerait pas, formulée par Cantor, se nomme l'**hypothèse du continu**.

Kurt Gödel a prouvé en 1938 que cette hypothèse n'était pas réfutable. En 1963, Paul Cohen a réussi à prouver qu'elle n'est pas non plus démontrable. Cela en fait donc une hypothèse **indécidable** - on rappelle que selon le très célèbre **Théorème d'Incomplétude de Gödel**, certaines hypothèses ne sont en effet ni démontrables ni réfutables.

2.5 Conclusion

Il existe donc bien plusieurs infinis : il y en a même une infinité, représentés par les cardinaux $\aleph_0$, $\aleph_1$... Mais, bien qu'on sache construire un infini toujours plus grand, on ne saura jamais si on n'en a pas oublié un entre deux infinis !

Chapitre 3

Bilan d'expérience

Cette unité est intéressante dans le sens où les méthodes de travail à adopter sont fondamentalement différentes de tous les autres cours que nous avons pu suivre en L1 et L2. C'est ce qui fait toute sa difficulté. Là où en Algèbre ou en Analyse, il nous suffit de suivre le cours et faire les devoirs que nous aura éventuellement donnés l'enseignant, ici nous sommes livrés à nous-mêmes. Nous devons savoir résoudre des problèmes, ce que l'on aura appris à faire depuis longtemps, mais pour la première fois trouver nous-mêmes *ce que sont* ces problèmes.

Je dois avouer que je suis bien meilleur faiseur que créateur. Résoudre un sujet donné, avec des questions précises, est un plaisir maîtrisé depuis longtemps ; chercher à tâtons ce sur quoi portera la suite du sujet est beaucoup moins aisé. Cette unité m'aura permis d'appréhender cette nouvelle méthode de travail, même si je suis encore loin de la maîtriser - j'ai eu pendant ce semestre beaucoup de mal à savoir où aller, à réussir en cas de cul-de-sac à changer de perspective et d'angle d'attaque... Par là, elle m'aura permis de comprendre un peu plus ce qu'est vraiment le travail de chercheur, vers lequel je me destine éventuellement - un double-diplôme ingénieur-master recherche ne me déplairait pas.

J'ai donc pu apprendre à utiliser plusieurs méthodes de travail plus ou moins nouvelles, comme le nouveau paradigme décrit ci-dessus, ou la recherche bibliographique et sur internet... En outre, un autre point positif de cette matière est que, grâce aux recherches effectuées, j'ai pu apprendre tout un vocabulaire que je ne connaissais peu ou pas. Ne serait-ce que dans le domaine de l'algèbre, j'ai pu apprendre des termes nouveau : sous-algèbres, morphismes, anneaux, hypermatrices... De quoi prendre un peu d'avance sur le programme de licence ! Mais le plus intéressant pour moi dans cette unité, en réalité, ce ne sont ni ces méthodes ni même le sujet en lui-même, ce sont tous les petits plus, qu'on découvre et qui peuvent s'avérer très utiles - et qui font partie du quotidien du chercheur. On m'a ainsi introduit à des outils intéressants comme le site oeis.org qui recense une quantité incroyable de suites d'entiers et qui permet de

voir que la suite étudiée, aussi bizarre soit-elle, a de grandes chances d'avoir déjà été découverte et comprise. Les enseignants ayant plusieurs fois évoqué avec enthousiasme un logiciel nommé "Latex", j'ai par curiosité profité des vacances pour en apprendre les rudiments - et écrire ce rapport par la même occasion. Comme je l'ai dit, ce sont toutes ces petites découvertes, certes plus ou moins bégnines, qui font le charme de la matière.

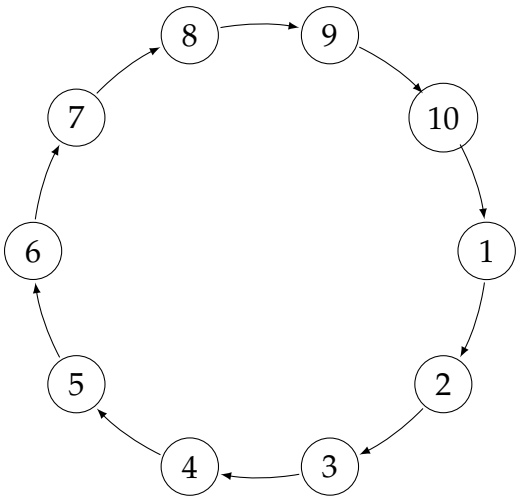
Chapitre 4

Défis

4.1 Le Jeu de Joseph

Enoncé : *"On joue au jeu de Joseph en tournant, toujours dans le sens des aiguilles d'une montre, sur un cercle où l'on a placé au préalable des cartes numérotées de 1 à N. On commence sur la carte numéro 1, que l'on élimine, puis à chaque coup, on élimine la troisième carte rencontrée."*

Problème : Si N vaut 2012, que vaut la carte éliminée juste après la carte portant le numéro 2012 ?



EXEMPLE POUR N = 10

Résolution :

La première étape est la plus aisée : on part de 1 et on élimine la troisième carte rencontrée. On élimine donc toutes les cartes x comprises entre 1 et 2012 telles que : $x \equiv 1 \pmod 3$. La

dernière carte éliminée sera donc $x = 1 + 3 * 670 = 2011$.

La troisième carte rencontrée à partir de 2011 sera la carte 3, puisque la carte 1 a déjà été éliminée. Puis on trouve la carte 8, les cartes 4 et 7 étant éliminées, puis la carte 12, la carte 10 étant éliminée... En fait, on "dépasse" alternativement une carte éliminée, puis deux cartes éliminées, ce qui implique qu'on passe à la carte suivante en avançant alternativement de 5 puis de 4 cartes (on a donc une période de 5+4=9). Une façon simple de résumer ceci est d'écrire qu'on élimine toutes les cartes x telles que :

- $x \equiv 3 \pmod 9$ ou
- $x \equiv 8 \pmod 9$

La dernière carte éliminée par ce deuxième procédé sera la carte
$x = 3 + 223 * 9 = 2010$, et la première carte éliminée du nouveau passage sera la carte 5.

Pour le troisième passage, on s'aperçoit que la répartition des cartes éliminées précédemment implique que, à partir de la carte 5, on rencontre successivement 3 cartes éliminées, puis 4, puis 3, puis 5, avant de pouvoir éliminer une nouvelle carte ; puis ce schéma recommence. On passe donc d'une carte à la suivante en ajoutant 6 puis 7 puis 6 puis 8 puis en recommençant (on a une période de 6+7+6+8=27). Par exemple, en partant donc de la carte 5, on élimine les cartes 11, 18, 24, 38, 45.... Une façon de résumer cela est de dire qu'on élimine les cartes x telles que :

- $x \equiv 5 \pmod{27}$ ou
- $x \equiv 11 \pmod{27}$ ou
- $x \equiv 18 \pmod{27}$ ou
- $x \equiv 24 \pmod{27}$

La dernière carte éliminée sera la carte $x = 11 + 74 * 27 = 2009$, et la première carte éliminée du nouveau passage sera la carte 6.

Le quatrième passage suit encore une fois le même procédé. On s'aperçoit que, en partant de x=6, on passe d'une carte à éliminer à la prochaine en ajoutant 9 puis 12, 9, 11, 9, 12, 9, 10, puis on recommence. On aura donc une période de 9+12+9+11+9+12+9+10=81. En partant de la carte 6 on élimine donc les cartes 15, 27, 36, 47, 56, 68, 77, 87... On résume ceci à :

- $x \equiv 6 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 15 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 27 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 36 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 47 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 56 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 68 \pmod{81}$ ou
- $x \equiv 77 \pmod{81}$

La dernière carte éliminée sera ici $x = 68 + 24 * 81 = 2012$! Revenons maintenant aux premiers chiffres : on a éliminé :

- par le premier passage 1, 4, 7, 10, 13...
- par le deuxième passage 3, 8, 12...
- par le troisième passage 5, 11...
- par le dernier passage 6...

Les cartes 2, 9 et 14 n'ont pas été éliminées. La prochaine carte à éliminer après la carte 2012 sera donc la carte 14 !

4.2 Somme des chiffres

Enoncé : *"La somme des chiffres d'un nombre N est égale à 1012. Celle des chiffres d'un nombre P est égale à 2012."*

Problème : Que vaut la somme des chiffres du nombre N+P, au minimum ?

Soient N = $(n_{k_1} n_{k_1-1} ... n_1 n_0)_{10}$: en base 10, $N = n_0 + 10^1 * n_1 + 10^2 * n_2 + ... + 10^{k_1} * n_{k_1}$
et P = $(p_{k_2} p_{k_2-1} ... p_1 p_0)_{10}$: en base 10, $P = p_0 + 10^1 * p_1 + 10^2 * p_2 + ... + 10^{k_2} * p_{k_2}$

On suppose que les deux nombres ont le même nombre de chiffres, k : pour cela on pose $k = max(k_1, k_2)$ et on remplit si nécessaire le nombre le plus court avec des zéros à gauche.

On a alors :

$$N + P = (n_0 + 10^1 * n_1 + 10^2 * n_2 + ... + 10^k * n_k) + (p_0 + 10^1 * p_1 + 10^2 * p_2 + ... + 10^k * p_k) \tag{4.1}$$

$$= (n_0 + n_1 + ...n_k) + (9 * n_1 + 99 * n_2 + ... + (10^k - 1) * n_k) \tag{4.2}$$

$$+ (p_0 + p_1 + ...p_k) + (9 * p_1 + 99 * p_2 + ... + (10^k - 1) * p_k) \tag{4.3}$$

$$= 1012 + 9 * (n_1 + 11 * n_2 + ... + \frac{(10^k - 1)}{9} * n_k) + 2012 + 9 * (p_1 + 11 * p_2 + ... + \frac{(10^k - 1)}{9} * p_k) \tag{4.4}$$

$$= 3024 + 9 * (n_1 + 11 * n_2 + ... + \frac{(10^k - 1)}{9} * n_k + p_1 + 11 * p_2 + ... + \frac{(10^k - 1)}{9} * p_k) \tag{4.5}$$

Donc $N + P \equiv 3024 \pmod 9 \equiv 0 \pmod 9$

Or, on sait d'après les critères de divisibilité qu'**un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9.** La somme des chiffres de N+P est donc divisible par 9. Cette somme étant nécessairement strictement positive, elle est donc **au moins égale à 9**. Si maintenant on trouve des nombres N et P tels que la somme des chiffres de N+P est égale à 9, on aura gagné.

Cela est chose faite avec, par exemple :

$$11...1111.....1 \tag{4.6}$$
$$255...555 \tag{4.7}$$
$$+\ 89...9744...445 \tag{4.8}$$
$$\text{———————} \tag{4.9}$$
$$90000....00000 \tag{4.10}$$

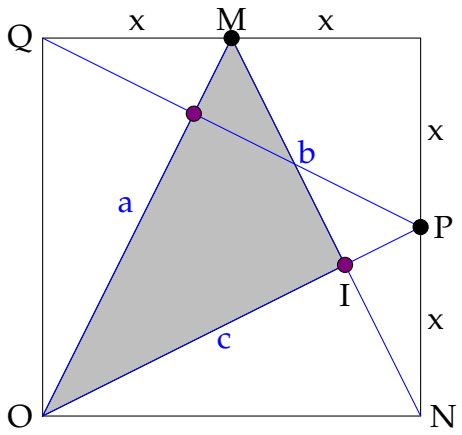
Avec **N = 255...555** : composé d'un "2" suivi de 202 "5". La somme de ses chiffres est donc bien de $2 + 202 * 5 = 1012$. Et **P = 899...99744...445** : composé d'un "8", 132 "9", un "7", 201 "4" et un "5". On a bien $8 + 132 * 9 + 7 + 201 * 4 + 5 = 2012$, et la construction de N et P aboutit à N+P valant $9 \cdot 10^k$, donc la somme de ses chiffres est égale à 9.

Conclusion : La somme des chiffres du nombre N+P est égale au minimum à 9 !

4.3 Devine-Surface

Enoncé : *"Les ronds noirs de la figure sont situés au milieu des deux côtés consécutifs d'un carré. Les côtés du triangle gris mesurent des nombres entiers de centimètres."*

Problème : Quelle est, au minimum, la surface du carré, en centimètres carrés ?



On note a, b et c les trois côtés du triangle gris, et x la moitié du côté du carré. ($a, b, c \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^*$)

Par Pythagore, on trouve la longueur du côté a : $a^2 = (2x)^2 + x^2 = 5x^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}x$. En refaisant trois fois la même méthode, on voit que tous les segments bleus sont égaux à a.

On remarque aussi que, si l'on effectue une rotation horaire de 90, le segment MN devient le segment OP, et le segment OM le segment PQ. Les segments bleus se coupent donc perpendiculairement aux deux points violets.

On peut donc appliquer Pythagore une nouvelle fois dans le triangle ION :

$$(2x)^2 = c^2 + (a-b)^2. \text{ Or } a = \sqrt{5}x \Rightarrow 4x^2 = c^2 + (\sqrt{5}x - b)^2$$
$$\Rightarrow 4x^2 = c^2 + 5x^2 - 2\sqrt{5}bx + b^2$$

Or, le triangle OMI étant perpendiculaire en I, on a $b^2 + c^2 = a^2 = (\sqrt{5}x)^2 = 5x^2$.

$$\Rightarrow 4x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2\sqrt{5}bx$$
$$\Rightarrow 6x^2 = 2\sqrt{5}bx$$
$$\underset{x \neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{\sqrt{5}b}{3}$$

Ainsi, l'aire du carré est de : $(2x)^2 = 4x^2 = 4 \cdot \frac{5 \cdot b^2}{9}$. Cette aire est minimale pour b=3, et on a alors $\mathscr{A} = 4 \cdot 5 = 20$ cm^2.

Conclusion : L'aire minimale du carré est de 20 cm^2.