

PIETRI

Océane

L1 MASS

Systemes de *monnaie.*

Introduction :

Tout comme la plupart des pays, en France ou en Europe, on utilise des pièces de 1, de 2, de 5 ou bien 200 euros par exemple, c'est-à-dire, en incluant les centimes, des pièces ou des billets d'une valeur comprise entre 1 centimes et 500 euros. On peut donc à partir de ces différentes valeurs extraire ce que l'on peut appeler un système $\{1 ; 2 ; 5\}$. Cependant, on peut se demander pourquoi les personnes qui ont décidé du choix de ce système ont privilégié celui-ci et pas un autre, comme par exemple le système $\{1 ; 3 ; 4\}$. Afin de pouvoir étudier ce sujet correctement, je suis, tout d'abord, parti du principe que les personnes qui avait choisit le système $\{1 ; 2 ; 5\}$ avait dû se baser sur certains critères pour pouvoir choisir ce système. Je me suis donc, tout d'abord lancé dans la mise en place des différents critères nécessaires à l'élaboration d'un bon système de monnaie. J'ai donc trouvé plusieurs critères qui, selon moi, sont essentiels dans l'établissement d'un système de monnaie que l'on pourrait qualifier de bon. Ensuite, je me suis atteler à vérifier avec le système européen d'une part l'exactitude des critères mis en évidence. Puis j'ai essayé de trouver d'autres critères utiles à l'élaboration d'un nouveau système de monnaie. Enfin, une fois tous les critères mis en évidence et vérifiés, il fallait s'attacher à tenter de trouver un nouveau système qui pouvait être aussi « puissant » voire meilleur que le système européen. En effet, durant mes recherches, je me suis posée de nombreuses questions notamment si ce nouveau système pouvait exister et également comment je pouvais débiter mes recherches, notamment en cherchant à poser ce sujet de matière mathématique. Je vais donc dans un premier temps exposé les critères qui sont, selon moi, nécessaires, puis dans un second temps, voir en quoi le système européen est un bon système et donc pourquoi il a été choisi et dans un troisième temps quel peut être un nouveau système qui soit meilleur ou aussi bon que le système $\{1 ; 2 ; 5\}$.

I. Pourquoi le système $\{1 ; 2 ; 5\}$?

1. Un petit tour historique et géographique.

Même si le système européen reste le système utilisé au monde, certains pays ont ou ont eu d'autres systèmes de monnaie. En effet, dans le passé certains pays ont d'autres pièces que les traditionnelles pièces de valeurs 1, 2, 5, 50 etc.... prenons un exemple assez récent, l'URSS par exemple, possédait une pièce de valeur de 3 kopeks (centimes). Ensuite, plus proche de chez nous, le Royaume-Uni possédait (comme à leur habitude) un système complètement différent. En effet, avant la décimalisation de 1971, les anglais avait un système $\{1, 3, 6, 12, 24, 30, 60, 100, 300\}$, qui est donc totalement différent du notre et on donc changeait en 1971 pour un système identique au notre. Ensuite au niveau géographique, le seul système connu qui diffère mais très légèrement du système

européen, est le système américain qui ne diffère du notre qu'au niveau des centimes avec une pièce de 25 centimes à la place de celle de 20 centimes.

2. Les critères initiaux.

Des le début de mes travaux, j'ai commencé par essayer de mettre en évidence, les critères, qui selon moi, étaient importants pour qualifier de bon un système de monnaie. Dans un premier temps, j'ai remarqué qu'avec le système que l'on utilisait dans la quasi-totalité du monde, on peut facilement remplacer une pièce par d'autres si cela nous arrange ou bien si l'on ne peut pas faire autrement. En effet, si par exemple, il nous manque une pièce de 5 euros, on peut remplacer celle-ci en utilisant 2 pièces de 2 euros et 1 pièce de 1 euros ou bien 3 de 1 euros et 1 de 2 euros, ou encore 5 pièces de 1 euros. On doit donc avoir une substituabilité entre différentes pièces grâce notamment à des combinaisons entre les pièces. Ensuite, il faut que l'on puisse pouvoir payer n'importe qu'elle somme avec un nombre de pièces le plus petit possible, c'est-à-dire que l'on ne peut pas avoir un système où il n'y a que la pièce de 1 euro ce serait beaucoup trop long pour payer par exemple 56 euros, mais on ne pourrait pas avoir une pièce de chaque sorte c'est-à-dire une pièce de 1 une de 2 une de 3... car ce serait beaucoup trop long de payer une somme précise car on mettrait trop de temps pour trouver la bonne pièce. Enfin, j'ai également posé comme condition pour être un bon système de monnaie, le fait d'avoir un nombre suffisant de possibilités de paiements d'une somme. En effet, on ne peut pas considérer qu'un système de monnaie est efficace et utilisable si l'on a qu'une seule possibilité de payer une somme quelconque S . durant toutes mes recherches je ne parlerai que de pièces car dans le cas présent, les pièces et les billets jouent le même rôle. De plus, je ne m'intéresserai qu'aux sommes entières comprises entre 1 et 100. En effet, si l'on se étudie les sommes inférieure à 1 euros (ou supérieure à 100), cela reviendrait au même qu'étudier les sommes comprise entre 1 et 100. De même si l'on regarde les sommes décimale comme par exemple, 18euros et 63 centimes cela reviendrait à étudier deux fois les sommes entre 1 et 100 euros. C'est donc pour cela que l'on étudiera que les sommes entre 1 et 100.

3. Première étude du système européen.

J'ai, tout d'abord, commencé par écrire un programme informatique qui effectuait de simples calculs sur le système européen, et notamment le calcul du nombre moyen de pièces utilisées pour payer à l'appoint une somme.

Voici donc ce programme écrit en C, qui calcule pour chaque somme comprise entre 1 et 100, le nombre de pièces utilisées pour la payer et affiche à la fin du calcul la moyenne :

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
int main (void)
{
    int som, rep,t[1000], z, som1, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p , res;
    double moy, val;
    som=1;
    z=0;
    som1=0;
    for (som=1; som<101; som++)
    {
        a=som/500 ;
        b=som%500 ;
        c=b/200 ;
        d=b%200 ;
        e=d/100 ;
        f=d%100 ;
        g=f/50 ;
        h=f%50 ;
        i=h/20 ;
        j=h%20 ;
        k=j/10 ;
        l=j%10 ;
        m=l/5 ;
        n=l%5 ;
        o=n/2 ;
        p=n%2 ;

        res=a+c+e+g+i+k+m+o+p;
        printf ("%d -> %d\n", som, res);
        som1=som1+res;
        t[z]=res;
        z++;
    }
    val=som1;

```

```

    moy=val/100;
    printf("moyenne=%.2lf\n", moy);
    printf("\n");
    return 0;
}

```

Grâce à ce programme, nous avons pu établir que l'on payait une somme comprise entre 1 et 100 en utilisant en moyenne 3,41 pièces. Nous avons pu également établir que l'on payer une somme en utilisant au maximum 6 pièces (pour 99 euros) et au minimum 1 pièces (pour 5 euros par exemple).

Ensuite, pour continuer l'étude du système européen, nous avons effectué des recherches internet sur ce que l'on savait à propos des systèmes de monnaie. Et durant ces recherches, ce qui est principalement ressorti, c'est qu'un bon système de monnaie doit avoir une propriété fondamentale, il doit être canonique^[1]. Cependant, il n'existe pas de critères généraux pouvant définir si un système est canonique ou non. Mais il existe différentes méthodes pour vérifier la canonicité d'un système. La canonicité d'un système pose le problème de rendre (ou payer) une somme donnée de façon optimale, c'est-à-dire avec un nombre optimale de pièces, (le plus petit possible). En effet, en général et de manière instinctive, on paye une somme en rendant toujours la pièce la plus grande possible mais inférieure ou de même valeur que la somme que l'on désire payer. C'est ce que l'on appelle l'algorithme glouton. On a donc une propriété essentielle : si, en payant une somme en utilisant l'algorithme glouton, on a la solution optimale pour payer cette somme, alors le système est dit canonique. La réciproque étant vraie. Mais cependant, on ne peut pas tester tout les sommes possibles et il n'existe pas de critères (tel que par exemple « toutes les valeurs faciales d'un systèmes sont premières entre elles ») pour savoir si un système est canonique. Pour pouvoir vérifier la canonicité d'un système grâce à la propriété précédente, il existe différents algorithmes afin de vérifier la canonicité d'un système. Tout d'abord, il y a :

- l'algorithme de Chang et Gill (1970) :

Cet algorithme montre qu'un système de monnaie $S_n = \{C_1 ; \dots ; C_n\}$ est canonique grâce aux inéquations suivantes :

$$C_3 \leq S < \frac{C_n(C_n C_{n-1} + C_n - 3C_{n-1})}{C_n - C_{n-1}}$$

Il suffit de tester toutes les valeurs S afin de vérifier si pour toute somme S comprise entre les membres de l'inéquation, l'algorithme glouton est optimal. Cependant, cet algorithme pose un problème majeur. En effet, si on prend le système $\{1 ; 8 ; 15\}$, il faudra tester si l'algorithme glouton est optimal pour toutes les sommes comprise entre 15 et 229. Ce qui représente 213 valeurs

en tout à tester ce qui est beaucoup trop important et beaucoup trop long si l'on doit faire tous les calculs à la main.

-l'algorithme de Kozen et Zaks (1994) :

En effet, Kozen et Zaks ont démontré que l'on pouvait améliorer l'algorithme de Chang et Gill. Ils ont donc démontré que l'on pouvait montrer si un système était canonique avec un algorithme plus simple que le précédent. En effet, pour montrer qu'un système est canonique, il suffit de montrer que pour toutes les sommes S , l'algorithme glouton est optimal en utilisant les inégalités suivantes avec un système de monnaie $\{C_1 ; C_2 ; \dots ; C_n\}$:

$$C_n + 1 < S < C_n + C_{n-1}$$

Exemple :

i) Prenons le système $\{1 ; 8 ; 11\}$. Ce système pris au hasard n'a aucune raison d'être canonique. Avec l'algorithme de Kozen et Zaks, cela donne :

$$11 + 1 < S < 11 + 8$$

$$\Leftrightarrow 12 < S < 19$$

Il faudra donc tester les sommes entières S appartenant à l'intervalle $[13 ; 18]$. On va donc avoir :

$$13 = 11 + 1 + 1 \text{ (3 pièces)}$$

$$16 = 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (6 pièces)}$$

$$14 = 11 + 1 + 1 + 1 \text{ (4 pièces)}$$

$$17 = 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (7 pièces)}$$

$$15 = 11 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (5 pièces)}$$

$$18 = 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (8 pièces)}$$

Or, pour $S=16$, avec ce système, on pourrait payer cette somme plus rapidement qu'avec la méthode de l'algorithme glouton. En effet, avec l'algorithme glouton, on utilise 6 pièces, une pièce de 11 et 5 pièces de 1, or on aurait besoin uniquement de 2 pièces si l'on utilise deux pièces de 8. On peut donc en conclure que le système $\{1 ; 8 ; 11\}$ n'est pas canonique.

ii) Prenons cette fois le système $\{1 ; 8 ; 15\}$. En utilisant l'algorithme de Kozen et Zaks, on a cette fois :

$$15 + 1 < S < 15 + 8$$

$$\Leftrightarrow 16 < S < 23$$

Cette fois-ci, il faudra tester toutes les sommes entières S appartenant à l'intervalle $[17 ; 22]$. On a donc :

$$17 = 15 + 1 + 1 \text{ (3 pièces)}$$

$$20 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (6 pièces)}$$

$$18 = 15 + 1 + 1 + 1 \text{ (4 pièces)}$$

$$21 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (7 pièces)}$$

$$19 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (5 pièces)}$$

$$22 = 15 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ (8 pièces)}$$

Sur cet exemple, on voit que le système $\{1 ; 8 ; 15\}$ est canonique. En effet, on voit que pour toutes les valeurs à tester, on n'a pas de meilleures solutions, en termes de nombre de pièces utilisées, en utilisant une autre méthode que l'algorithme glouton.

- L'amélioration de Pearson (1994) :

L'algorithme précédent fut amélioré par Pearson grâce au théorème suivant : « Si un système de N pièces n'est pas canonique, alors il existe une somme S tel que : l'algorithme glouton n'est pas optimal pour S mais il l'est pour toute somme strictement à S. Ce qui est donc vérifié avec le système $\{1 ; 8 ; 15\}$ qui n'est pas canonique.

On peut donc à présent, ajouter un nouveau critère à ceux établi précédemment. On peut donc dire que pour être un bon système de monnaie, celui-ci doit être canonique, c'est-à-dire que l'algorithme glouton est optimal pour toute somme donnée.

4. Dénombrement des différentes manières de payer une somme.

On pourrait à présent se demander combien il y a de manières différentes de payer 10 euros avec uniquement des pièces de 1 et de 2. Dénombrons ces différentes possibilités à l'intérieur d'un tableau :

Différentes manières de payer 10 euros avec des pièces de 1 et de 2 euros.

X = (nombres de pièces de la valeur faciale a=1)	Y = (nombres de pièces de la valeur faciale b=2)
0	5
2	4
4	3
6	2
8	1
10	0

On voit, grâce à ce tableau que l'on a 6 possibilités de payer 10 euros en utilisant uniquement des pièces de 1 et de 2. A présent, voyons le nombre de possibilités de payer 20 et 30 euros, toujours avec des pièces de 1 et 2 euros.

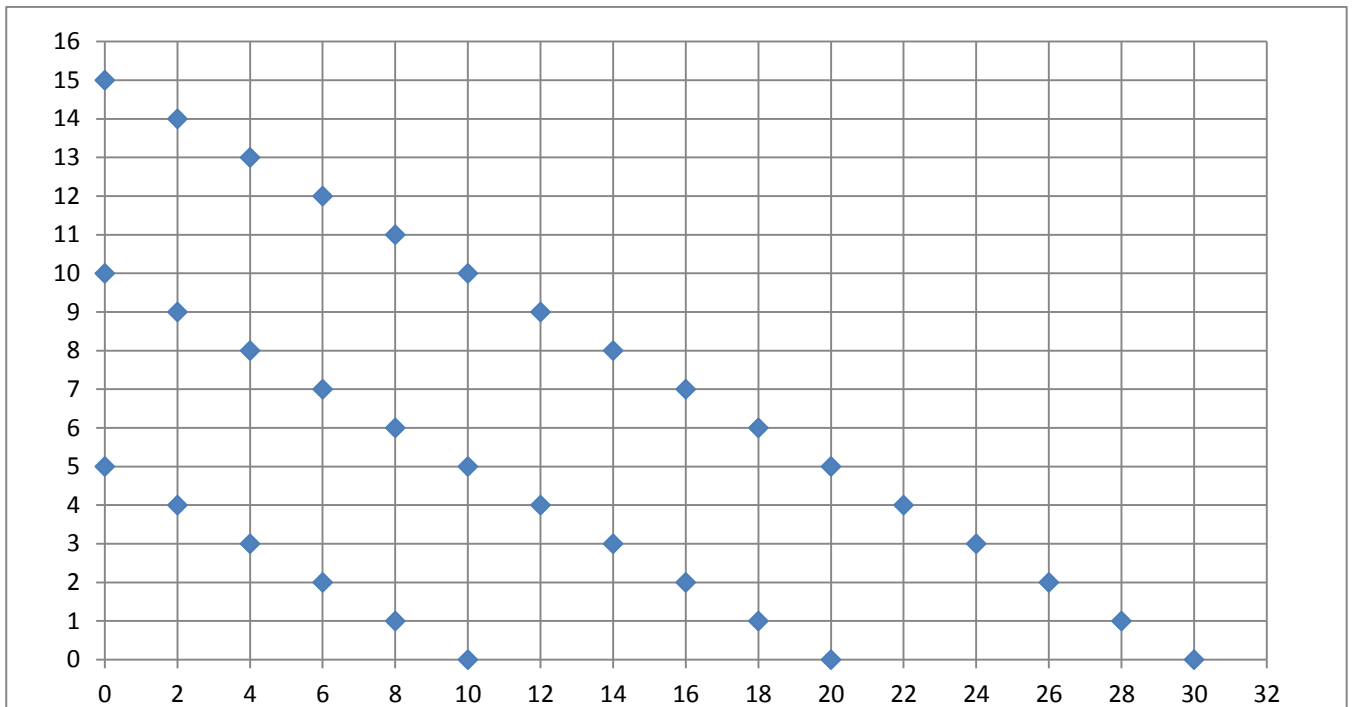
Différentes manières de payer 20 euros avec des pièces de 1 et de 2 euros.

X = (nombres de pièces de la valeur faciale a=1)	Y = (nombres de pièces de la valeur faciale b=2)
0	10
2	9
4	8
6	7
8	6
10	5
12	4
14	3
16	2
18	1
20	0

Différentes manières de payer 30 euros avec des pièces de 1 et de 2 euros.

X = (nombres de pièces de la valeur faciale a=1)	Y = (nombres de pièces de la valeur faciale b=2)
0	15
2	14
4	13
6	12
8	11
10	10
12	9
14	8
16	7
18	6
20	5
22	4
24	3
26	2
28	1
30	0

On voit donc, à travers ces tableaux, que l'on a 11 possibilités de payer 20 euros et 16 possibilités de payer 30 euros. On voit que l'on peut consigner ces différents résultats dans un graphique.



On a donc sur ce graphique, en abscisse, le nombre de pièces utilisées de la valeur faciale a (ici a=1) et en ordonnée, le nombre de pièces utilisées de la valeur faciale b (ici b=2). On voit donc sur ce graphique que, d'une part, les trois droites ont exactement le même coefficient directeur et que, d'autre part, l'ordonnée à l'origine de chaque droite est égale à la somme que l'on désire payer divisée par 2. Elles ont donc toutes les trois des équations semblables qui sont de la forme :

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{S}{b}$$

On pourrait alors se poser une question :

- pourrait-on générer une formule qui nous permettra de calculer le nombre de manières de payer une somme avec deux pièces ?

En utilisant uniquement des pièces de 1 et de 2 euros, on remarque que le nombre de manières de payer 10, 20 et 30 euros est égal, dans ces trois cas précis, à la somme que l'on veut payer divisée par 2 et auquel on ajoute 1. On peut donc établir une première formule.

$$N = \frac{S}{2} + 1$$

Cependant, on pourrait se demander si la division par 2 dans cette formule vient du fait que l'on utilise une pièce de 2 euros ou bien si ce sera le cas si l'on utilise uniquement des pièces de 1 et de 5 euros.

Voyons, donc à présent, le nombre de possibilités pour payer les mêmes sommes, 10, 20 et 30 euros en utilisant uniquement des pièces de 2 et de 5 euros.

Différentes manières de payer 10 euros avec des pièces de 2 et de 5 euros.

X = (nombres de pièces de la valeur faciale a=2)	Y= (nombres de pièces de la valeur faciale b=5)
0	2
5	0

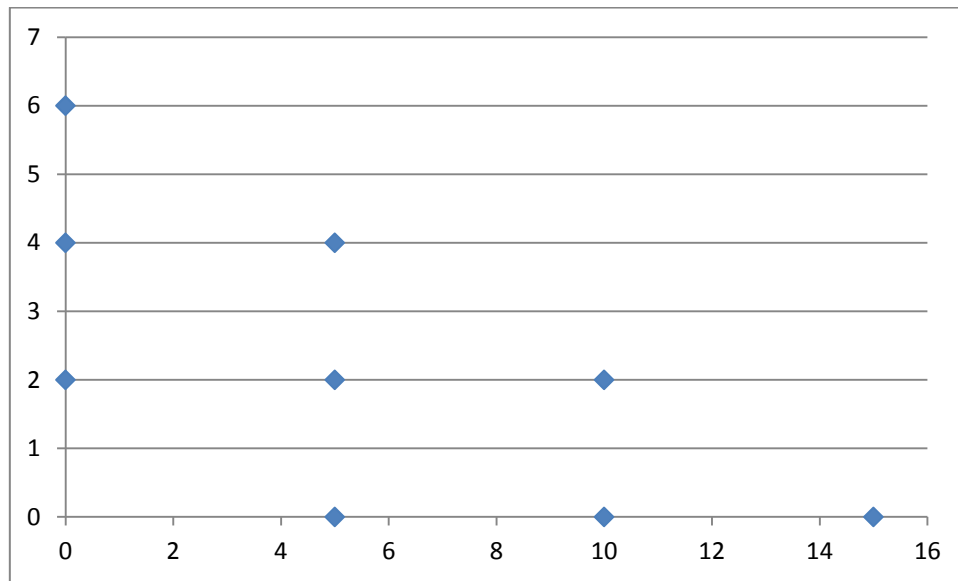
Différentes manières de payer 20 euros avec des pièces de 2 et de 5 euros.

X = (nombres de pièces de la valeur faciale a=2)	Y= (nombres de pièces de la valeur faciale b=5)
0	4
5	2
10	0

Différentes manières de payer 30 euros avec des pièces de 2 et de 5 euros.

X = (nombres de pièces de la valeur faciale a=2)	Y= (nombres de pièces de la valeur faciale b=5)
0	6
5	4
10	2
15	0

On peut donc encore une fois consigner ces résultats dans un graphique :



On voit donc ici que comme précédemment ces trois équations diophantiennes sont semblables et sont de la forme :

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{S}{b}$$

On voit ici que l'on a 2 manières de payer 10 euros, 3 de payer 20 euros et 4 de payer 30 euros en utilisant uniquement des pièces de 2 et de 5 euros. En faisant une analogie avec la formule précédente, on peut établir une nouvelle formule sur la manière de dénombrer les différentes possibilités de paiement d'une somme avec 2 pièces différentes.

$$N = \frac{S}{10} + 1$$

Or, $2=2 \times 1$ et $10=2 \times 5$, or dans le premier cas on a utilisé uniquement des pièces de 1 et de 2 euros et dans le second cas, on a uniquement utilisé des pièces de 2 et de 5 euros. On peut donc encore améliorer notre formule de dénombrement des différentes manières de payer une somme avec 2 pièces.

On va donc avoir :

$$N = \left[\frac{S}{a \times b} \right] + 1$$

Avec S, la somme que l'on veut payer, a et b les valeurs faciales des deux pièces que l'on veut utiliser et N, le nombre de possibilités de paiement.

N.B : on doit mettre $\frac{S}{a \times b}$ entre partie entière au cas où S ne serait pas un multiple de a et b afin de pouvoir tout de même effectuer les calculs.

(P.S : Après avoir testé cette formule sur de nombreux exemples, j'ai supposé sa véracité car malgré mes recherches, je n'ai pas réussi à démontrer cette formule.)

J'avais essayé de consigner dans un graphique en 3D les résultats que j'avais obtenu pour un somme en utilisant trois pièces mais cela c'est avéré trop difficile à faire et à étudier, c'est donc pour cela que j'avais renoncé à cette idée.

On peut donc ajouter cette formule à nos critères initiaux, qui nous servirons plus tard dans l'élaboration d'un possible nouveau système de monnaie.

A l'issue de mes recherches sur le système européen, j'ai donc réussi à mettre en évidence un certain nombre de critères qui pouvait nous permettre de définir toutes les propriétés d'un bon système de monnaie. Il faut donc que celui-ci soit canonique, qu'il ait un nombre important de possibilités de paiement d'une somme. Mais il faut également que l'on puisse facilement remplacer une pièce par une autre si cela s'avérait utile ou obligatoire. Mais à présent essayons d'imbriquer tous ces critères les uns dans les autres afin de voir s'il on peut trouver un système aussi bon voire meilleur que le système européen et répondant à tout ces critères.

II. Vers un nouveau système.

1. Utilisation des critères établis précédemment.

Grâce à aux premiers critères établis de manière instinctives ainsi que grâce à ceux établis au fur et à mesure de l'étude du système européen, nous allons donc tenter d'élaborer un nouveau système de monnaie aussi bon voire meilleur, que le système actuellement utilisé en Europe et quasiment partout dans le monde, s'il en existe un. Cependant, on ne peut pas prendre au hasard n'importe quel système de monnaie et vérifier si celui-ci est compatible avec tous nos critères établis précédemment, cela serait beaucoup trop long et pas assez efficace. C'est donc pour cela que nous allons, encore une fois, utiliser la méthode informatique qui simulera tous les calculs nécessaires. Nous avons utilisé un programme informatique en C qui calcul si un système de monnaie, fait de trois pièces comprenant forcément la pièce de 1 euros et dont les 2 autres pièces ont une valeur faciale comprise entre 2 et 15, est canonique et l'affiche à l'écran. Ensuite, comme le simple critère de canonicité ne suffit pas, il faut tenir compte de la formule que nous avons établi précédemment qui nous permet de calculer le nombre de manière possible de payer un somme particulière en utilisant les 2 pièces les plus grandes. Ainsi, en rajoutant ce critère à notre programme précédent, nous pouvons supprimer un certain nombre de systèmes, qui même en étant canonique, ne peuvent pas d'être utilisé dans la vie courante pour payer une somme. Grace à l'imbrication de ces deux conditions, canonicité et dénombrement, ce programme ne nous donnera que les systèmes canoniques mais dont le nombre de manière de payer une somme avec ce système est supérieur ou égal au nombre de manière de payer cette même somme avec le système européen. Enfin, on peut améliorer ce programme informatique en utilisant le programme utilisé pour calculer la moyenne du nombre de pièces utilisées pour payer une somme entre 1 et 100. En effet, un système peut permettre d'avoir un plus grand nombre de possibilités de paiement que le système européen pour une somme précise, mais ce n'est pas forcément le cas pour toutes les autres sommes entre 1 et 100. C'est donc pour cela que l'on peut ajouter à ce programme informatique des instructions permettant de calculer la moyenne du nombre de pièces utilisées pour chaque système répondant aux critères précédent.

Voici le programme^[2] en C effectuant ces calculs :

```
#include <stdio.h>

#include <stdlib.h>

/* Fonction qui retourne le nombre de pièce utilisé par l'algorithme glouton pour rendre la somme nb*/
int nbGlouton(int N, int nb, int* c)
```

```

{
    int i=0, j=0, somme=0;
    while(i<N && somme != nb)
    {
        while(nb-somme >= c[i])
        {
            somme += c[i];
            j++;
        }
        i++;
    }
    return j;
}

/* Utilisation des propriétés de Pearson */

int gloutonBiaise(int N, int pivot, int* c, int nb)
{
    int i = 0, somme = 0, total = 0, nb_op = 0, resultat;
    while(i<pivot+1 && somme != nb) {
        int j=0;
        while(nb-somme >= c[i]) {
            somme += c[i];
            j++;
        }
        if(i<pivot) {
            total += j*c[i];
            nb_op += j;
        }
        else if(i == pivot) {
            total += (j+1)*c[i];

```

```

        nb_op += j+1;
    }

    i++;
}

if(nb_op < nbGlouton(N, total, c)) resultat = 1; // si le systeme est canonique il renvoie 0 sinon il renvoie 1
else resultat = 0;

return resultat;
}

int aiJePerdu(int N, int* capacites)
{
    int i = 1, j, resultat = 0;
    while(i<N && resultat == 0)
    {
        j = i;
        while(j<N && resultat == 0) {
            resultat = resultat + gloutonBiaise(N, j, capacites, capacites[i-1]-1);
            j++;
        }
        i++;
    }

    return resultat;
}

int main(void)
{
    int capacites[3];

    int res1, ka, la, nb, some, aa, ba, nb1 ;

    int som, rep,t[1000], z, som1, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p , res;

    double moy, val;

```

```

som=1;

printf("quelle somme \n");

scanf("%d", &some);

capacites[2]=1;

for(ka=2; ka<20;ka++)
{
    capacites[1]=ka;

    for(la=ka+1; la<20 ;la++)
    {
        capacites[0]=la;

        res1=aiJePerdu(sizeof(capacites) / sizeof(int), capacites);

        if (res1==0)
        {
            aa=capacites[1];

            ba=capacites[0];

            nb=(some/(aa*ba))+1;

            nb1=(some/(2*5))+1;

            som1=0;

            if ( nb>=nb1)

            {

                printf("le système choisit est {%d, %d, %d}.\n",
capacites[2],capacites[1],capacites[0] );

                printf("on a %d maniere de payer %d\n", nb, some);

                z=0;

            som1=0;

            for (som=1; som<101; som++)

            {

                a=som/(capacites[0]*100) ;

                b=som%(capacites[0]*100) ;

```

```

        c=b/(capacites[1]*100) ;
        d=b%(capacites[1]*100) ;
        e=d/(capacites[2]*100) ;
        f=d%(capacites[2]*100) ;
        g=f/(capacites[0]*10) ;
        h=f%(capacites[0]*10) ;
        i=h/(capacites[1]*10) ;
        j=h%(capacites[1]*10) ;
        k=j/(capacites[2]*10) ;
        l=j%(capacites[2]*10) ;
        m=l/(capacites[0]) ;
        n=l%(capacites[0]) ;
        o=n/(capacites[1]);
        p=n%(capacites[1]) ;
        res=a+c+e+g+i+k+m+o+p;
        som1=som1+res;
        t[z]=res;
        z++;
        val=som1;
        moy=val/100;
    }

    printf("moyenne=%.2lf\n", moy);
    printf("\n");
}

}

}

return 0;
}

```

Nous pouvons donc voir que lorsque l'on exécute ce programme plusieurs fois, nous avons deux systèmes qui ressortent, sans compter le système {1 ; 2 ; 5}, le système {1 ; 2 ; 3} et le système {1 ; 2 ; 4}. Or parmi ces systèmes, le système {1 ; 2 ; 3} a une moyenne de 3.61 pièces utilisées pour payer une somme entre 1 et 100 alors que le système {1 ; 2 ; 4} a une moyenne égale à celle du système {1 ; 2 ; 5}, c'est-à-dire, 3.41 pièces utilisées. Cependant, on voit que pour chaque exécution du programme avec une somme différente, toujours comprise entre 1 et 100, le système {1 ; 2 ; 3} a toujours un nombre de possibilités de paiement d'une somme plus importants que le système {1 ; 2 ; 4}.

Mais comment faire un choix entre ces 2 systèmes ? En effet, on a d'un côté le système {1 ; 2 ; 3} qui a une moyenne de 3.61 pièces utilisées pour payer une somme entre 1 et 100, plus élevée que pour le système européen. Mais il permet d'avoir beaucoup plus de possibilités de paiement d'une somme en utilisant uniquement les 2 valeurs faciales les plus grandes du système, alors que pour le système {1 ; 2 ; 4} c'est le contraire. On a une moyenne de 3.41 (la même que celle du système européen) mais à l'inverse du système {1 ; 2 ; 3}, le système {1 ; 2 ; 4} permet d'avoir un nombre de possibilités de paiement égale ou légèrement supérieur à celui du système européen mais inférieur à celui du système {1 ; 2 ; 3}. Il faudrait donc déterminer lequel de ces deux critères est le plus important et le plus utile. Mais à l'heure actuelle, il faudrait pousser encore plus les recherches et continuer les recherches, et particulièrement au niveau du dénombrement des différentes manières de payer une somme mais cette fois en utilisant plus que deux pièces, ou bien chercher vers des systèmes avec plus de trois valeurs faciales.

2. Quelles limites ?

Les limites que l'on pourrait établir se trouvent au niveau des critères de sélections des bons systèmes de monnaie. Le premier problème vient de la formule du dénombrement des différentes manières de payer une somme. En effet, la formule que nous avons obtenu précédemment ne marche que lorsque l'on utilise 2 pièces quelque soit leurs valeurs faciales. Prenons un exemple :

Si l'on souhaite payer 10 euros en utilisant des pièces de 1, de 2 et de 5, on a un certain nombre de possibilités, qui sont résumées dans le tableau suivant :

Différentes manières de payer 10 euros en utilisant des pièces de 1, de 2 et de 5.

X= nombre pièces de 1	Y= nombres de pièces de 2	Z= nombre de pièces de 5
0	0	2
1	2	1
3	1	1
0	5	0
2	4	0
4	3	0
6	2	0
8	1	0
10	0	0

Nous voyons, grâce à ce tableau, que nous avons 9 possibilités de payer 10 euros en utilisant uniquement des pièces de 1, de 2 et de 5. Or, si nous utilisons la formule établie précédemment, on obtient, en la généralisant à trois pièces utilisées :

$$N = \left\lceil \frac{S}{a \times b \times c} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{10}{1 \times 2 \times 5} \right\rceil + 1 = 2 \text{ possibilités de paiement}$$

On a donc un contre-exemple qui prouve que la formule établie précédemment est fausse si on la généralise à trois pièces. Et ce contre-exemple pose un problème. En effet, il se pourrait qu'en utilisant trois pièces à la place de deux, les résultats change complètement, même si selon moi, cela semble peu probable.

Conclusion :

J'ai donc travaillé durant tout ce semestre, sur les systèmes de monnaie. En effet, pourquoi avait-on choisi le système {1 ; 2 ; 5}. Grâce à l'étude du système européen, j'ai pu mettre en évidence différents critères qui pourrait nous permettre d'élaborer un nouveau système de monnaie. En effet, pour qu'un système de monnaie soit efficace, il faut tout d'abord que celui-ci ne soit pas trop compliqué à utiliser, c'est-à-dire qu'il n'y ai pas trop de pièces a utiliser car cela prendrait trop

de temps pour payer une somme. Ensuite, il faut aussi que le système de monnaie en question soit canonique, c'est-à dire que l'algorithme glouton soit optimal. Enfin, on doit pouvoir avoir un grand nombre de possibilités de paiement d'une somme afin de ne pas être bloqué si jamais il nous manque pièce. Enfin, après l'étude du système européen je me suis attelé à chercher quel pourrait être le système de monnaie qui pouvait remplacer le système européen si il en exister un. Ainsi, grâce aux critères mis en évidences dans un premier temps et à l'utilisation de programme informatique, j'ai pu montrer qu'il fallait tenir compte du nombre de pièces utilisées pour payer une somme en utilisant l'algorithme glouton (3.41 pour le système européen, 3.41 et 3.61 pour les deux systèmes de remplacements $\{1 ; 2 ; 4\}$, $\{1 ; 2 ; 3\}$). Il faut également tenir compte du nombre de manière que l'on a pour payer une somme selon les différents systèmes. Au final, on arrive à obtenir deux nouveaux systèmes qui pourrait se substituer au système européen : le système $\{1 ; 2 ; 3\}$ et le système $\{1 ; 2 ; 4\}$ qui possède chacun des avantages et des inconvénients. Mais cependant, mes recherches possèdent des limites car il n'y a pas assez de preuves surtout au niveau du dénombrement des différentes manières de payer une somme. Pour pouvoir affiner mes conclusions, il faudrait chercher s'il existe des systèmes de monnaie avec plus de valeurs faciales, quatre par exemple, et vérifier si l'on obtient de meilleurs avec ces nouveaux systèmes. Il faudrait voir ensuite combien de pièces de chaque sorte, au minimum, il faudrait avoir sur soit pour pouvoir n'importe quelle somme. Enfin, il faudrait également continuer les recherches et chercher d'autres pistes pour encore améliorer mes recherches.

Définitions :

Système de monnaie: Ensemble de n éléments appartenant à $\mathbb{N}^*$, strictement différents.

Valeurs faciales : On appelle valeurs faciales, les différents éléments d'un système de monnaie qui nous nous servirons, une fois un système de monnaie établi, à créer des pièces de monnaie.

Algorithme glouton : Un algorithme glouton est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local, c'est-à-dire qu'à chaque étape on choisira la pièce la plus grande possible sans dépasser la somme que l'on veut obtenir.

Système canonique : Un système est canonique si pour toute somme si le paiement d'une somme en utilisant l'algorithme glouton est optimal (le plus petit possible en terme de nombre de pièces utilisées.).

Compte-rendu d'une activité extérieure :

Parmi toutes les activités proposées durant ce semestre, j'ai beaucoup apprécié la conférence « Représentation et Mesure de la Terre au XVI^e siècle », donnée par Mr Karim Bouchamma. Comment peut-on faire pour mesurer la circonférence de la Terre ? Aujourd'hui, nous avons les satellites et des moyens informatiques. Mais au XVI^e siècle, on n'avait pas ces méthodes et ces instruments. De nombreux savants de l'Antiquité et surtout de la Renaissance ont réussi à mesurer cette circonférence. Un grand nombre d'entre eux ont réuni leurs travaux dans ce que l'on appelle des cosmographies. Une cosmographie est la description des systèmes astronomiques de l'Univers.

Tout d'abord, nous allons voir la place des cosmographies au XVI^e siècle. De nombreux savants de la Renaissance se sont inspirés ou ont repris les travaux de savants de l'Antiquité, qui eux-mêmes déjà avaient écrit des cosmographies. Il y a deux cosmographies majeures qui nous viennent de l'Antiquité. :

- *Le traité du ciel* d'Aristote.

- *La composition mathématique* ou *Almageste* de Ptolémée.

Il y eut comme cosmographie à la Renaissance, celle de Johannes Sacrobosco, *le traité de la sphère* (1607 en France). Dans celle-ci, Sacrobosco va donner une certaine définition de « la sphère du monde ». De plus, il reprendra les travaux d'Eratosthène qui fut le premier à mesurer la circonférence de la Terre, et avait trouvé 39690 km à la place des 40000 km. Ensuite, il y eut la cosmographie de Pierre Apian en 1524, dans laquelle il explique notamment quels instruments il se servait lors de ces travaux, comme l'arbalétrille, l'azimut ou le nocturlabe ainsi que sa propre mesure de la circonférence de la Terre en lieu d'Allemagne et trouvait 5400 lieues d'Allemagne. Ensuite il y eut la *Cosmographia Universalis* de Sébastien Münster, dans laquelle, il calcula que la Terre mesurait 40500 km. De plus, il y présente notamment les instruments qu'il utilise comme le cercle hollandais ou bien le trigonomètre. Enfin, il y eut *la sphère du monde* d'Oronce Fine en 1532.

Ensuite, Mr Bouchamma nous parla des différents instruments utilisés par Gemma Frisius, Niccolo Tartaglia et Willebrord Snell. Les instruments que la plupart utilisait étaient fabriqués par de grands fabricants comme les Arsenius, Humphrey Cole ou Erasmus Habermel. Chez Gemma Frisius, les instruments cités dans *le livret de la raison* sont notamment l'Astrolabe, le Planimètre

ou le carré géométrique. Dans les *Quesiti et inventioni diverse libro V* de Tartaglia, les instruments utilisés sont la Bussola per rilievi, et le quart de cercle Azimutal. Quant à Snell, il a utilisé notamment le quadrant astronomique ainsi que le compas de proportion.

Enfin, Mr Bouchamma nous a parlé les différentes descriptions, triangulation et représentation de la Terre. En effet, dans *Libellus de Locorum describendorum ratione*, Gemma Frisius, montra qu'a partir d'un point fixe, il pouvait mesurer différents angles puis d'un autre point il mesurait les même angles et les mêmes distances que précédemment, puis en les répertoriant sur une carte il en déduisit les distance dans la réalité. De même, Tartaglia avait deux méthodes pour représenter un lieu ou une ville. En effet, en supposant que cette ville ou ce lieu était des polygones, il se plaçait, pour la première méthode, au milieu, il notait les différents angles et distances jusqu'aux différents points du polygone et il les reporta sur carte. Pour la deuxième méthode, il se place sur l'un des sommets de la figure (sur le terrain), puis il mesurait les angles et les distances appropriés par rapport au deuxième sommet, puis il fit de même en se plaçant sur le deuxième et fit de même pour tous les autres Dans la cosmographie *Eratosthene Batavus*, Snell va se servir de la triangulation qu'il a effectué entre les villes de Alkmaar et Bergen Op Zoom afin de calculer la circonférence de la Terre. En effet, grâce à une méthode très précise, il a réussi à calculer cette longueur et trouva 38649.4 km au lieu de 40074.1 km. Cependant, quelque soit la méthode utilisée, elles étaient extrêmement précises pour l'époque, puisque prenons l'exemple du dernier calcul, il ne manquait à Snell que 1425 km pour avoir la bonne mesure mais malgré cela la mesure la plus proche reste celle qu'avait effectué Eratosthène durant l'Antiquité.

Bilan d'expérience de la matière :

Globalement, j'ai plutôt bien aimé cette matière. Je trouve que le fait de faire travailler les élèves sur des sujets qui, à l'origine, nous paraissent anodin et les transformer en problème mathématique assez complexe, m'a permis de voir les mathématiques sous un autre angle que dans les cours habituels que nous avons pu suivre à la faculté ou au lycée. En effet, cela m'a permis de voir en quoi les mathématiques, qui sont plutôt une science abstraite, m'ont servis pour résoudre des problèmes qui peuvent apparaître comme plutôt simples. De plus, j'ai également beaucoup aimé les activités que nous avons fait en dehors des séances de TD, que ce soit les exposés que vous nous avez présenté (sur l'infini ou sur les fractales) même si certains ne m'ont pas énormément plu ou bien les différentes sorties proposées à l'intérieur ou à l'extérieur de la faculté comme les stages hippocampe, le souk des sciences ou encore la conférence sur la mesure de la Terre. Cependant, n'étant pas une adepte du travail en groupe, j'ai un peu moins aimé cette idée. Quand on travaille en groupe, on dépend trop souvent des capacités et du travail des autres, ce qui peut poser quelques problèmes surtout si cela se passe mal.

Mais malgré ce seul point négatif, j'ai tout de même apprécié cette matière qui fut très enrichissante.

Bibliographie.

[1] : site internet wikipédia : [fr.wikipedia.org/wiki/Problème_du_rendu_de_monnaie](http://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_du_rendu_de_monnaie)

[2] : [www.smashmycode.com/2012/01/le-problème-du-rendu-de-monnaie/](http://www.smashmycode.com/2012/01/le-probl%C3%A8me-du-rendu-de-monnaie/) j'ai utilisé ce site pour écrire le second programme informatique car je n'y arrivai pas seule et j'ai également bénéficié de l'aide de mon professeur de programmation Mme Godbert, pour ce même programme.