# Les embouteillages


## Par Jérôme RICHARD, Gwenael RIVAUX et Marien LAHAY

élèves de terminale S3 du lycée d'Altitude de Briançon

*Panneaux réalisés par les élèves pour la présentation au congrès MATh.en.JEANS à la Villette*

Afin de simplifier le problème des embouteillages, on détermine certaines conditions initiales.
- une seule file de voiture
- les voitures sont de même gabarit
- deux positions possibles: arrêt ou marche
- toutes les voitures ont la même vitesse

On modélise donc le problème sous forme de tableau où chaque ligne est un temps T différent et chaque colonne est une position différente. Une case rouge représente un véhicule et une case blanche un espace vide.

| | N | N+1 | N+2 | N+3 | N+4 | N+5 | N+6 | N+7 | N+8 | N+9 | N+10 | N+11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T=0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

La règle locale nous donne le fonctionnement suivant :
- une voiture avance quand l'espace juste devant elle est vide.
- une voiture reste sur place quand l'espace juste devant elle est occupé.

| | N | N+1 | N+2 | N+3 | N+4 | N+5 | N+6 | N+7 | N+8 | N+9 | N+10 | N+11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T=1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| T=2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

On obtient le modèle suivant:
On note V(T;N) la fonction qui détermine la présence ou pas d'une voiture au temps T et à la position donnée N.

| | N | N+1 |
|---|---|---|
| T | 1 | 0 |
| T+1 | 0 | 1 |

| | N | N+1 | N+2 |
|---|---|---|---|
| T | X | 1 | 1 |
| T+1 | | 1 | |

X = *état quelconque*

**V(T+1 ; N+1) = 1**
**si V (T ; N) = 1 et V ( T ; N+1) = 0**
**ou si V (T ; N+1) = 1 et V (T ; N+2) = 1**

## Résolution d'un bouchon de *n* voitures :

On étudie la résolution d'un bouchon comportant une suite de *n* voitures.

On note les *n* voitures $1^n$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T=1 | 1 | 1 | ..... | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

On obtient la résolution suivante:

À T=0 => $1^n$

À T=1 => $1^{n-1}01$

À T=2 => $1^{n-2}0101$

À T=*k* => $1^{n-k}(01)^k$

À T=*n* => $(01)^n$

Exemple avec *n*=6

| T | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

*Présentation par les élèves à la Villette >*

**Théorème :**
**Un bouchon de *n* voitures se résorbe au bout d'un temps T égal à *n*.**

# Résolution de deux bouchons de $n_1$ et $n_2$ voitures séparées par $p$ espaces vides.

On étudie l'évolution dans le temps de deux bouchons de $n1$ et $n2$ voitures séparées par $p$ espaces vides. Plusieurs cas possibles :

### Si $n_1<p<n_2$

On obtient l'évolution suivante :
À T=0 => $1^{n1}0^p1^{n2}$
À T=1 => $1^{n1-1}010^{p-1}1^{n2-1}01$
À T=2 => $1^{n1-2}01010^{p-2}1^{n2-2}0101$

À T=$n_1$ => $(01)^{n1}0^{p-n1}1^{n2-n1}(01)^{n1}$ Le premier bouchon est résorbé, le deuxième bouchons à $n_2$-$n_1$ voitures.

À T=$p$ => $(01)^{n1}1^{n2-p}(01)^p$ Les voitures du premier bouchon ont rattrapées le deuxième bouchon. Ce qui créé un bouchon de $n_2$-$p$+1 voitures qui est alimenté pendant $n_1$-1 temps.

À T=$p+n_1$ => $1^{n2-p}(01)^{p+n1}$ On retrouve un bouchon « simple » de $n_2$-$p$ voitures.

### Si $p<n_1<n_2$

On obtient l'évolution suivante :
À T=0 => $1^{n1}0^p1^{n2}$
À T=1 => $1^{n1-1}010^{p-1}1^{n2-1}01$
À T=2 => $1^{n1-2}(01)^20^{p-2}1^{n2-2}(01)^2$

À T=$p$ => $1^{n1-p}(01)^p1^{n2-p}(01)^p$ Le deuxième bouchon est maintenant de $n_2$-$p$+1. Il va être alimenté de manière régulière par le premier bouchon.

Physiquement le deuxième bouchon va se rapprocher du premier.
À T=$n_1$ => $(01)^{n1}1^{n2-p}(01)^{n1}$ Il reste un seul bouchon de $n_2$-$p$+1 voitures qui est alimenté pendant $n_1$-1 temps.

À T=$p+n_1$ => $1^{n2-p}(01)^{p+n1}$ On retrouve un bouchon « simple » de $n_2$-$p$ voitures.

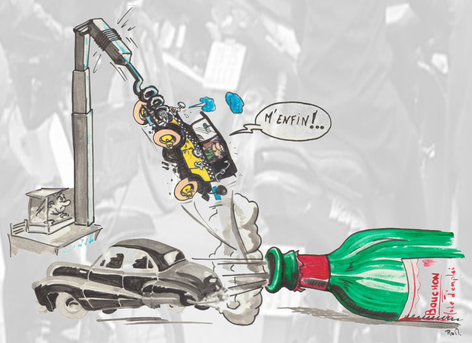
### Si $n_1>p>n_2$

On obtient l'évolution suivante: Le deuxième bouchon se résorbe et n'est pas alimenté par les voitures du premier bouchon (car $p>n2$).
Finalement au temps $n_1$, le plus gros bouchons est résorbé.

### Si $n_1>n_2>p$

On est très proche du cas $n_1<p<n_2$ .

À T=0 => $1^{n1}0^p1^{n2}$
À T=1 => $1^{n1-1}010^{p-1}1^{n2-1}01$
À T=2 => $1^{n1-2}01010^{p-2}1^{n2-2}0101$




À T=$p$ => $1^{n1-p}(01)^p1^{n2-p}(01)^p$ Les voitures du premier bouchon ont rattrapées le deuxième bouchon.
Ce dernier est alimenté régulièrement, donc ne change pas de taille.
À T=$n_1$ => $(01)^p1^{n2-p}(01)^{n1}$

À T=$p+n_1$ => $1^{n2-p}(01)^{p+n1}$ On retrouve un bouchon « simple » de $n_2$-$p$ voitures.

Et enfin ***si $p>n_1>n_2$ ou $p>n_2>n_1$***

Les deux bouchons ne rentreront pas en « contact ». Le temps nécessaire est alors le maximum entre $n_1$ et $n_2$.

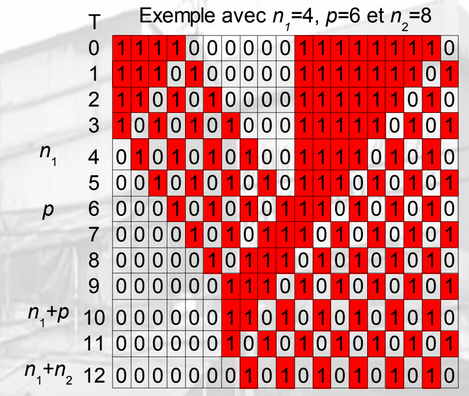
## Finalement on abouti à deux théorèmes

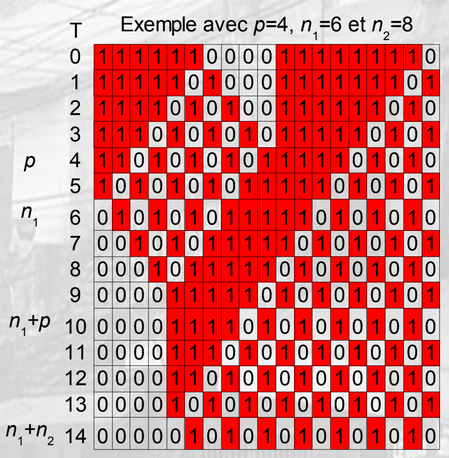
**Théorème :**
**Deux bouchons de $n_1$ et $n_2$ voitures séparées de $p$ espaces vides ($p<n_2$) se résorbent à T=$n_1+n_2$.**

*Discussion entre les élèves et leur enseignant lors du stage Hippocampe*

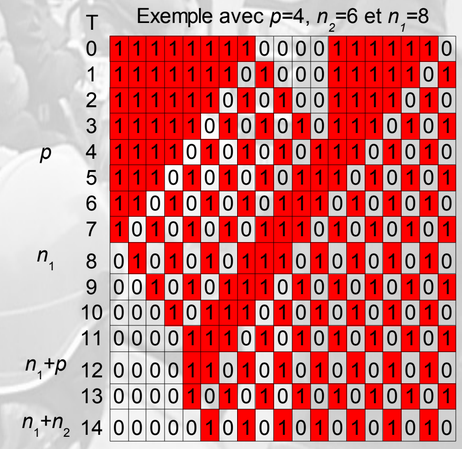
**Théorème :**
**Deux bouchons de $n_1$ et $n_2$ voitures séparées de $p$ espaces vides ($p>n_2$) se résorbent à T=max($n_1$;$n_2$).**

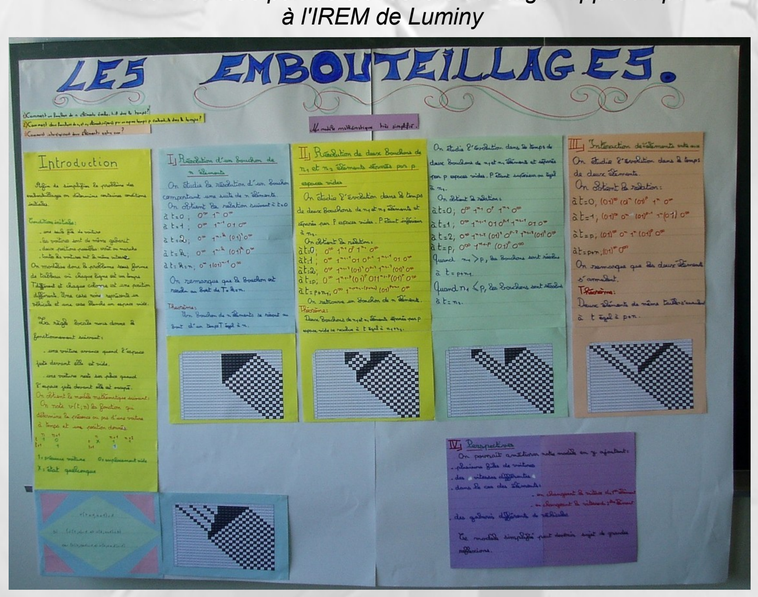
Atelier *MATh.en.JEANS* du Lycée d'Altitude de Briançon. 2005/2006-2/2-



*Présentation par les élèves aux chercheurs de l'Institut de Mathématiques de Luminy*




*Panneaux réalisés par les élèves lors du stage Hippocampe à l'IREM de Luminy*