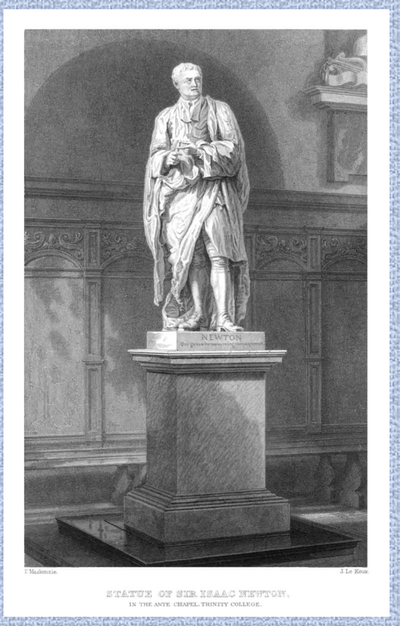
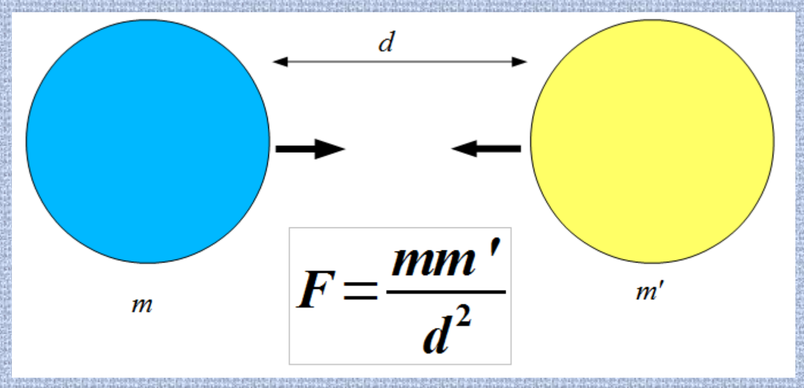
La loi de Newton

Par Nicolas KELLER,
Arthur IMBERT
et Bastien PENARD
élèves de 1°GE et 1°S
du lycée d'Altitude de Briançon



Loi de Newton

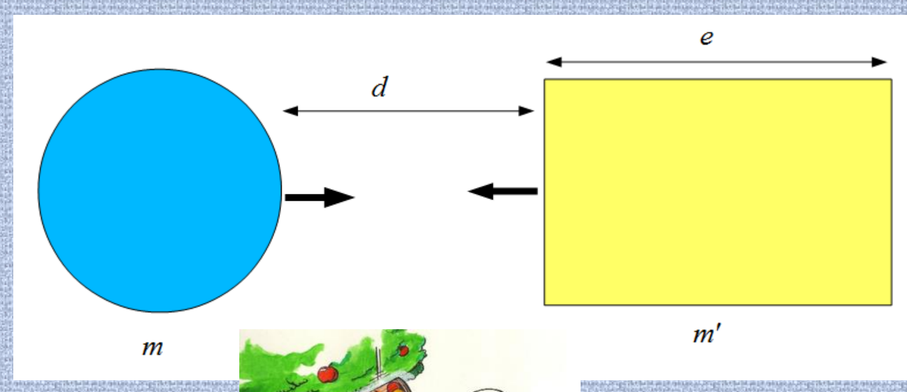
Quand nous avons deux planètes sphériques de masse m et m' séparées par une distance d, la force d'attraction est alors égale à $\frac{mm'}{d^2}$



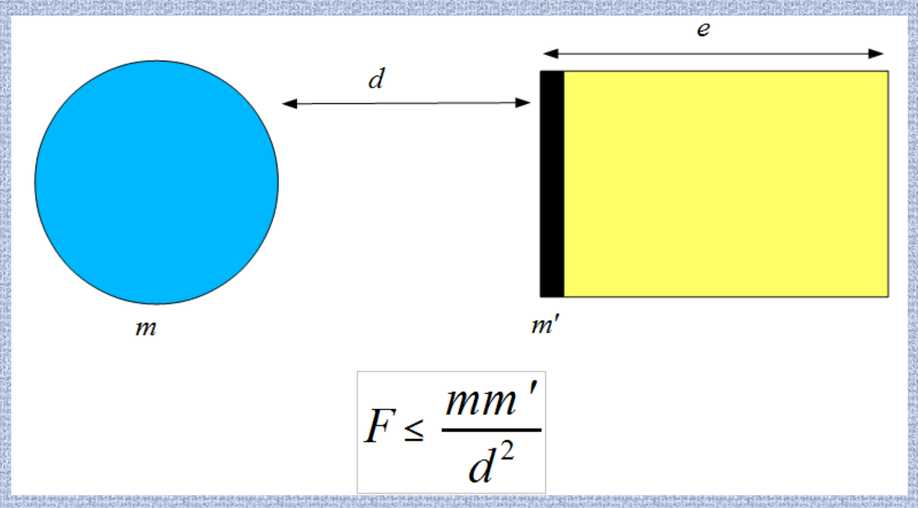
<u>Remarque:</u> si la distance d est grande, la force est petite et si d est petit, la force est grande.

Notre problème est le suivant :

Que se passe-t-il quand l'une des planètes n'est pas sphérique mais cylindrique ? Quelle distance prendre ?

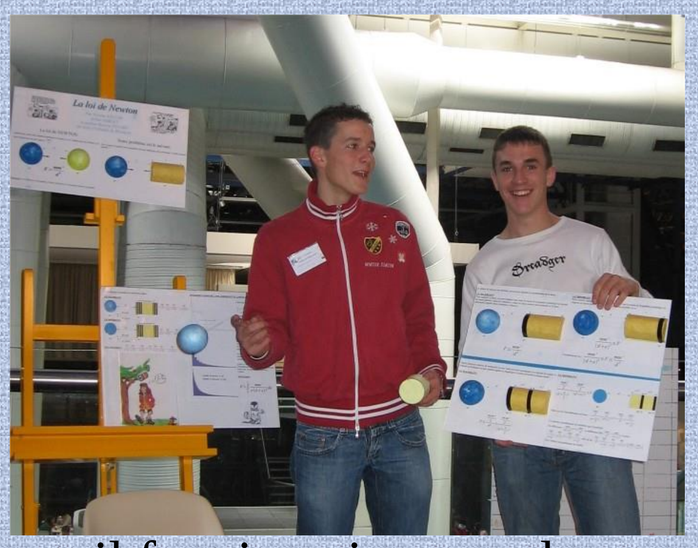


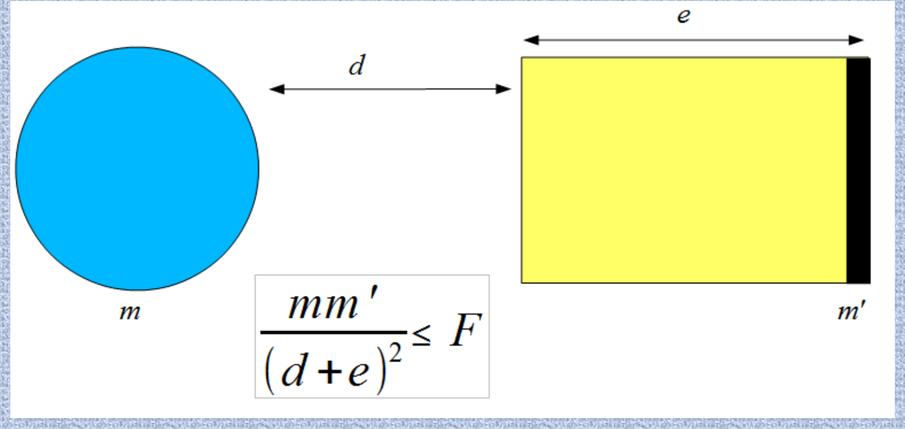
A défaut de trouver une formule, nous avons cherché un encadrement de la force.



LE MAJORANT

Pour majorer la force, on peut imaginer que toute la masse de la planète cylindrique est proche de l'autre planète. Ainsi la « distance » entre les deux masses sera minimale et la force maximale (d'après notre remarque ci-dessus)





LE MINORANT

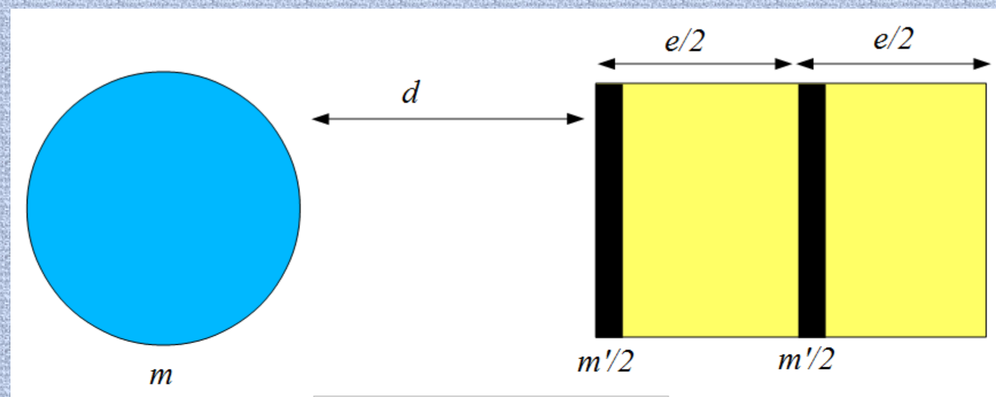
Pour ensuite calculer le minorant, il faut imaginer que la masse de la planète cylindrique est répartie de façon inverse, c'est-à-dire le plus loin possible de m.

L'encadrement est : $\frac{mm'}{(d+e)^2} \leq F \leq \frac{mm'}{d^2}$

La loi de Newton

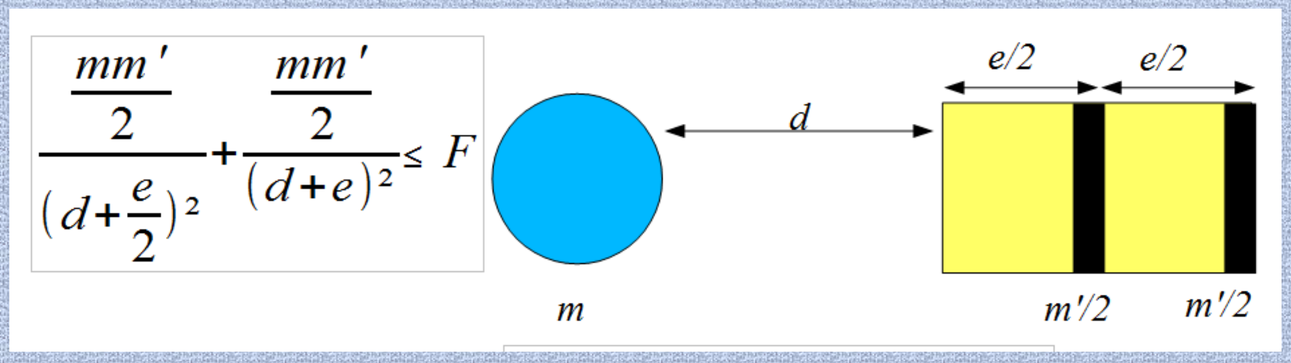
Après plusieurs séances de recherche et avec l'aide de notre enseignant, nous avons décidé de couper la planète cylindrique en deux parties égales et d'appliquer le même procédé à chaque partie.

LE MAJORANT



$$F \le \frac{\frac{mm'}{2}}{d^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{\left(d+\frac{e}{2}\right)^2}$$

LE MINORANT



$$\frac{\frac{mm'}{2}}{\left(d+\frac{e}{2}\right)^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+e)^2} \le F$$

Dans ce cas, l'encadrement est donc :

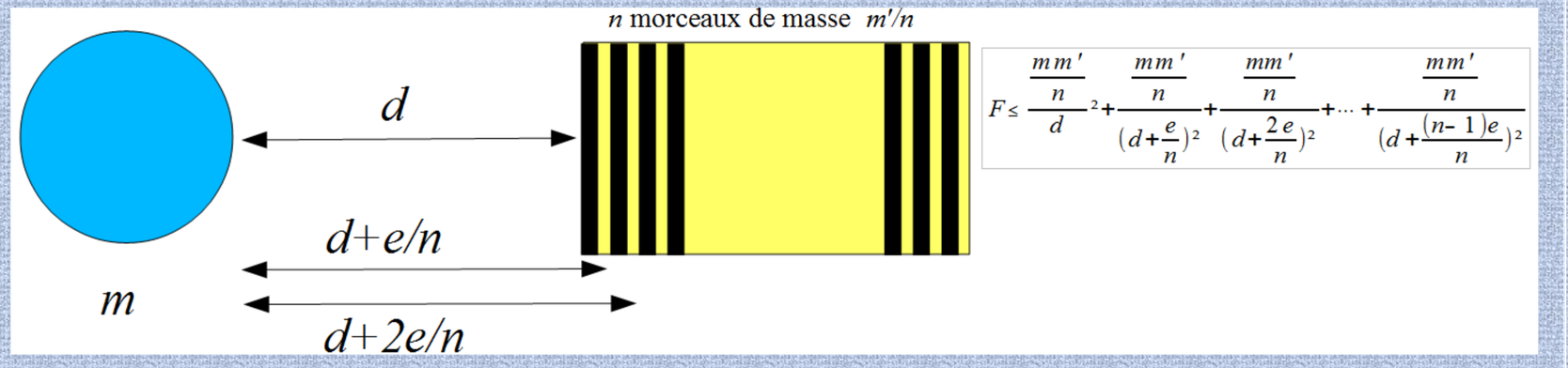
$$\frac{\frac{mm'}{2}}{\left(d+\frac{e}{2}\right)^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{(d+e)^2} \le F \le \frac{\frac{mm'}{2}}{d^2} + \frac{\frac{mm'}{2}}{\left(d+\frac{e}{2}\right)^2}$$

Cet encadrement est meilleur que le premier.

En effet on a réduit l'amplitude de l'encadrement de moitié.

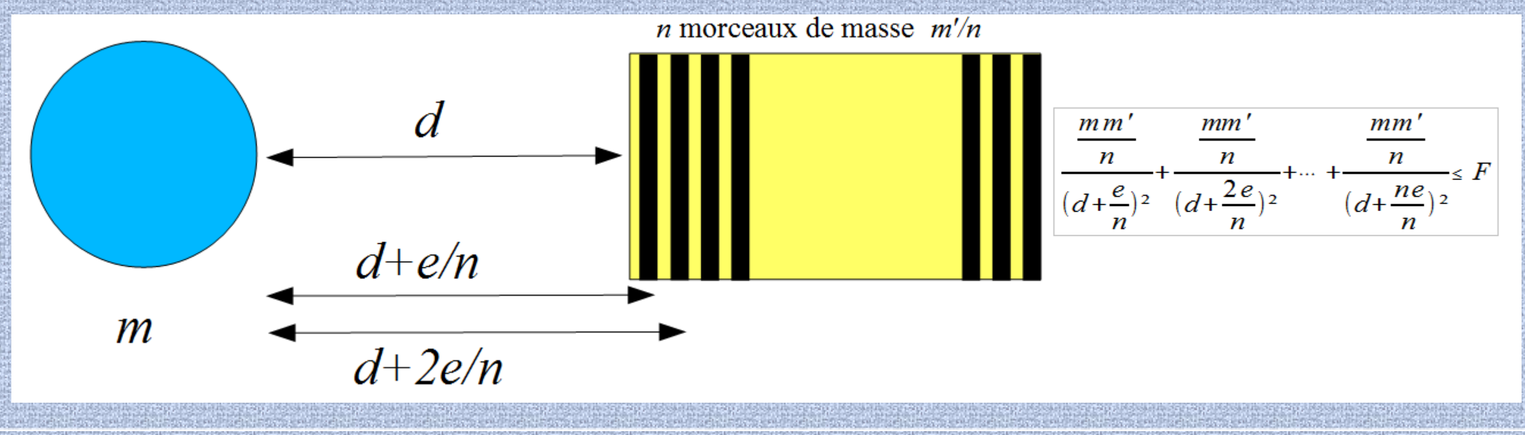
Si on découpe la planète en n morceaux égaux, on obtient :

LE MAJORANT



$$F \le \frac{\frac{mm'}{n}}{d^2} + \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{e}{n}\right)^2} + \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{2e}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{(n-1)e}{n}\right)^2}$$

LE MINORANT



$$\frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{e}{n}\right)^2} + \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{2e}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{ne}{n}\right)^2} \le F$$

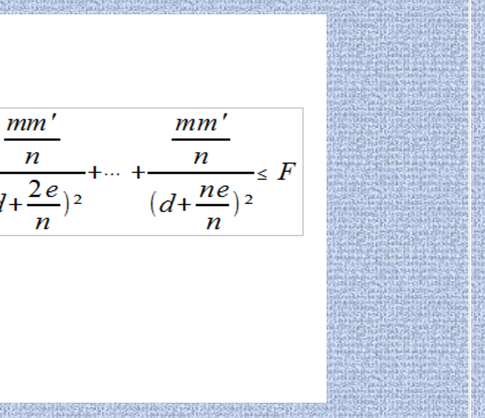
Interprétation de l'encadrement et limite quand n tend vers +∞.

On trace la fonction $f(x) = \frac{mm'}{e(x+d)^2}$. L'aire d'un rectangle noir est $\frac{e}{n} \times \frac{mm'}{e\left(d+\frac{ke}{n}\right)^2} = \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{ke}{n}\right)^2}$

et celle d'un rectangle quadrillé est $\frac{e}{n} \times \frac{mm'}{e\left(d+\frac{(k+1)e}{n}\right)^2} = \frac{\frac{mm'}{n}}{\left(d+\frac{(k+1)e}{n}\right)^2}$

Ainsi quand k varie, la somme des aires des rectangles noirs donne le majorant (ci-dessus) et la somme des aires des rectangles quadrillés donne le minorant.

La force F est donc entre ces deux surfaces (somme des rectangles noirs et somme des rectangles quadrillés).



Quand n devient très grand (à la limite), l'encadrement tend vers F,

c'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction f .

$$F = \int_0^e \frac{mm'}{e(d+x)^2} dx$$