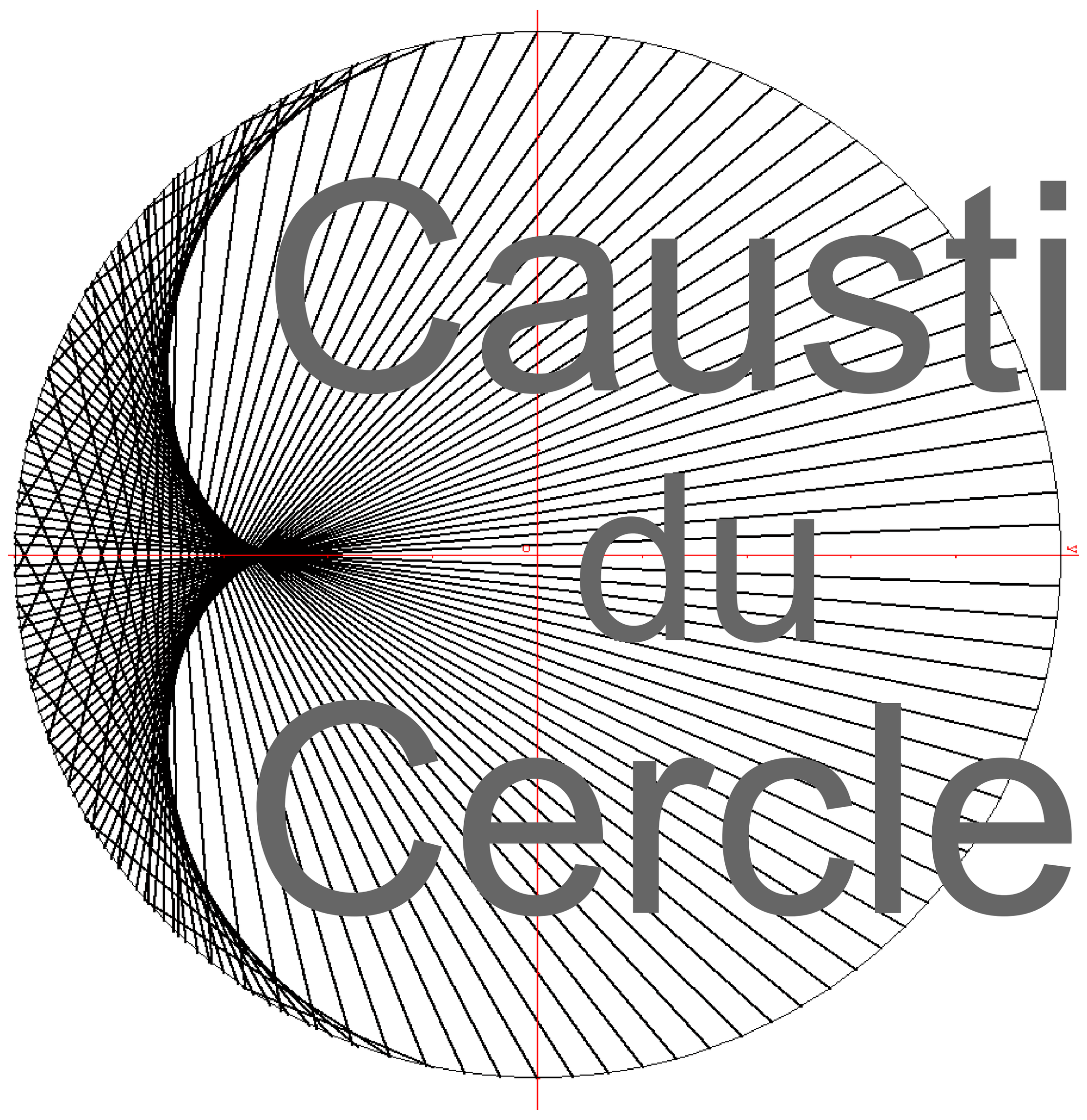
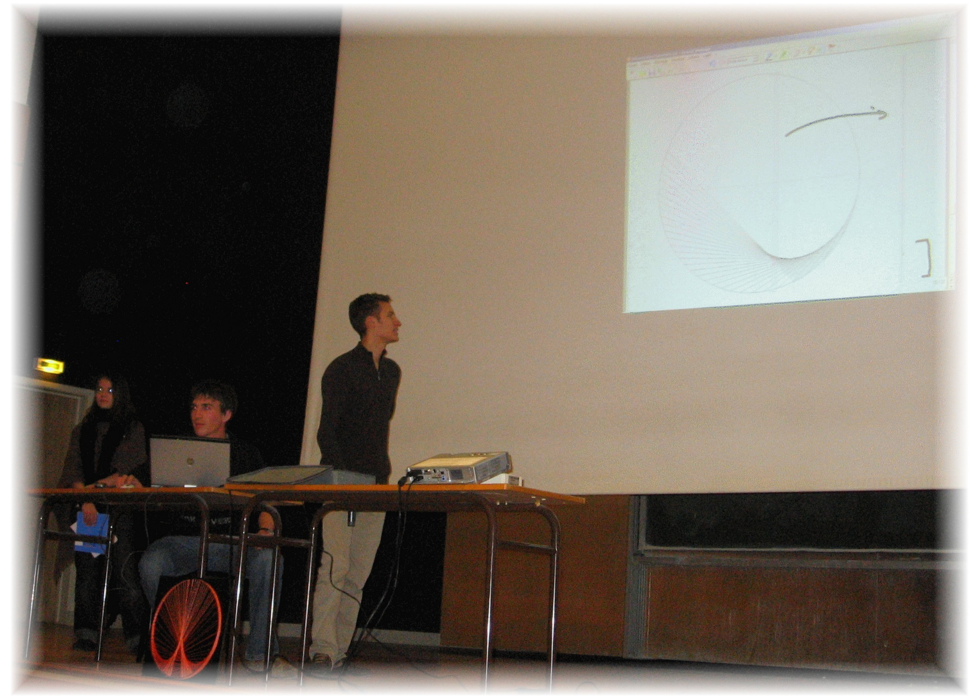


Caustique du Cercle



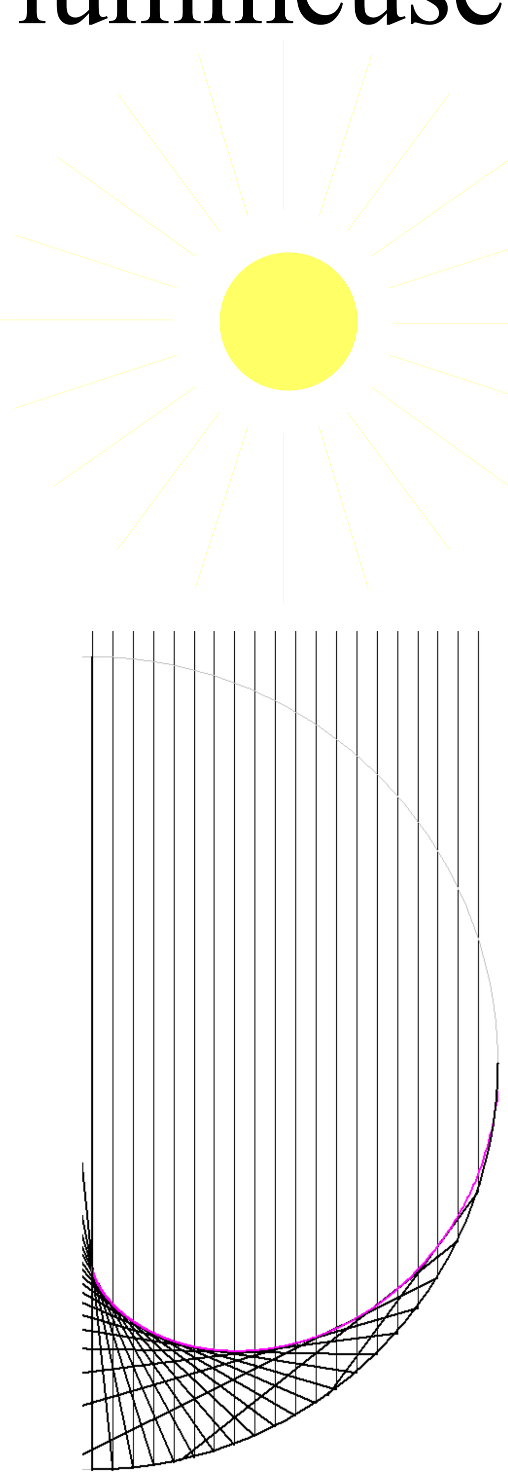
Présentation au congrès à l'université de Cergy-Pontoise

Par Alice BOSSUET (1re GE),
Rémi DOUMENC (Term. GE)
et Bastien PENARD (Term. GE)

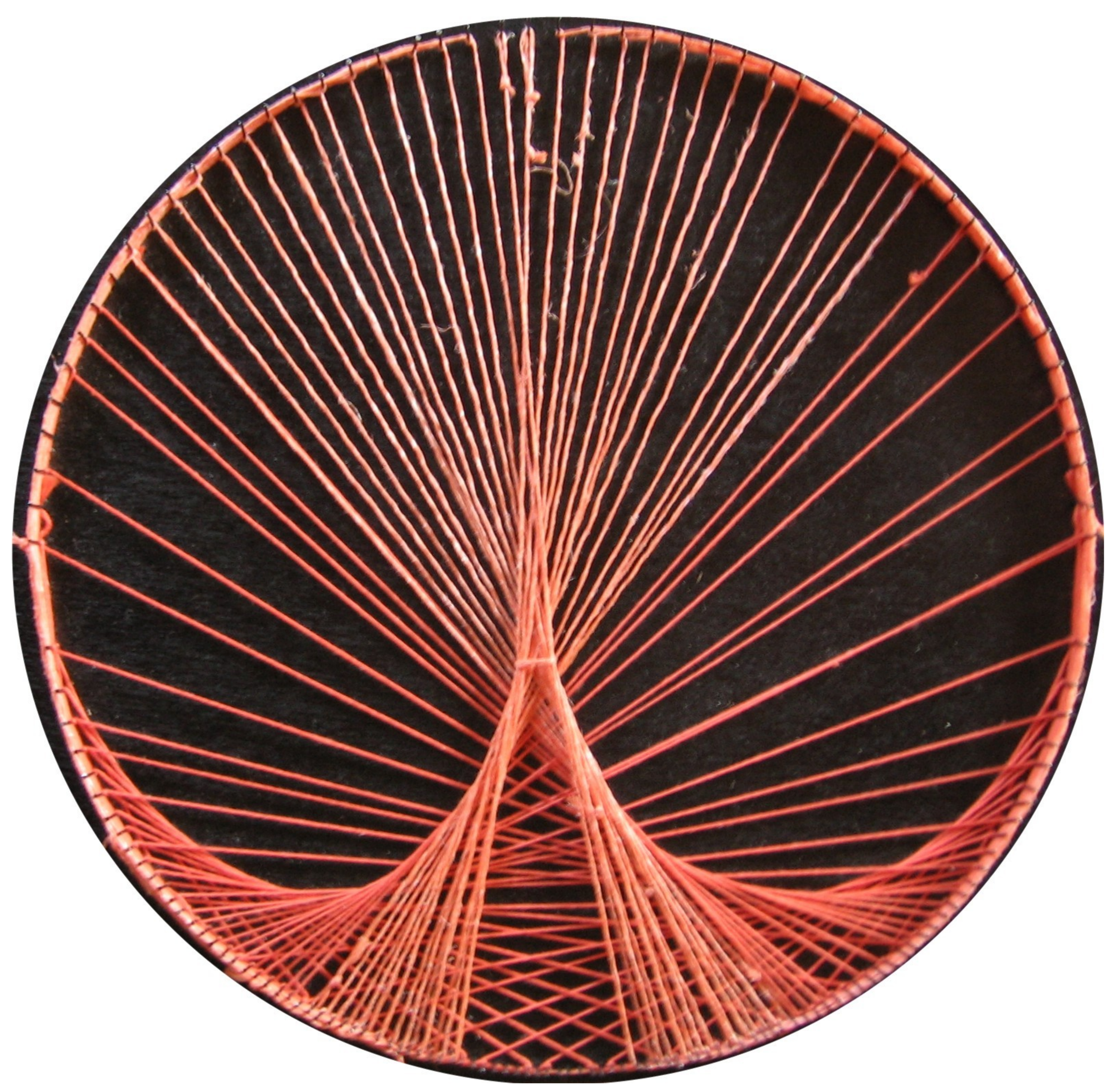
Dessine-moi une caustique

Avez-vous déjà observé que, lorsque la lumière arrive d'une certaine manière sur une tasse ou une prise électrique ronde, il se forme une ombre ayant une forme étrange dont le bord est constitué de deux arcs de cercle avec une pointe au milieu ?...

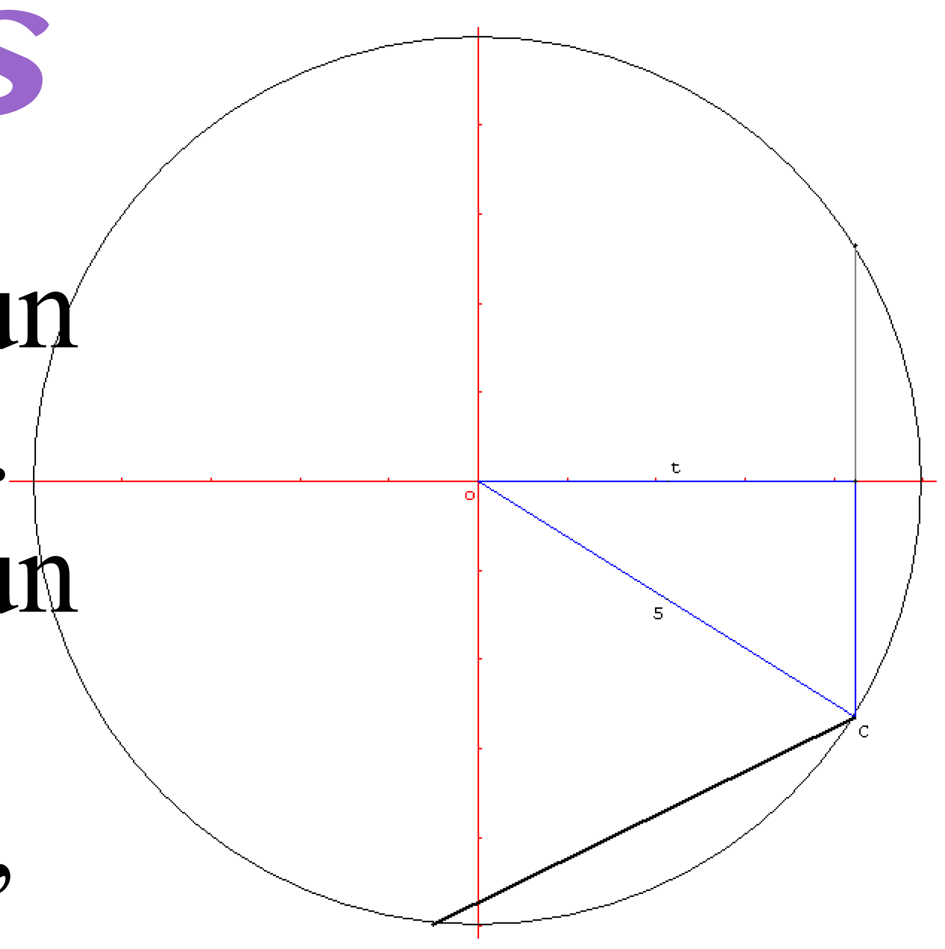
Notre problème a été de déterminer l'équation cartésienne de la courbe qui représente ce bord faisant la séparation entre la zone d'ombre et la zone lumineuse, appelée « **caustique** ».



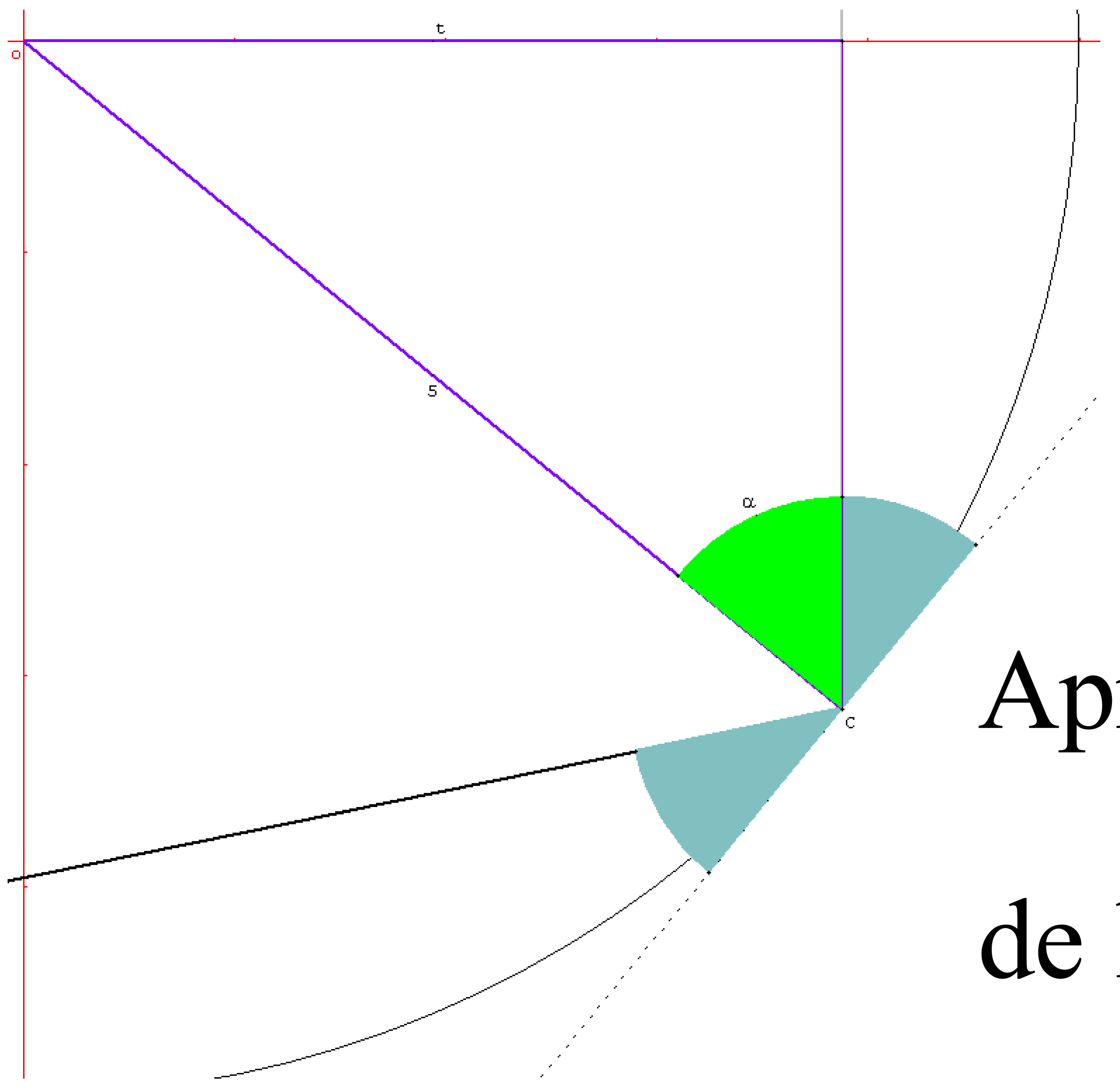
Il s'agit en fait de l'enveloppe des droites qui correspondent aux rayons lumineux réfléchis par la paroi circulaire de la tasse (ou de la prise électrique).



Équation des droites réfléchies



Pour calculer les équations de ces droites, on est partis d'un cercle de rayon 5 (ce cercle représente la paroi de la tasse).
La droite incidente a pour équation $x = t$, où t est un paramètre qui varie entre -5 et 5.
Cette droite est réfléchie au point de contact avec le cercle, c'est-à-dire au point $C\left(t\,;-\sqrt{25-t^2}\right)$

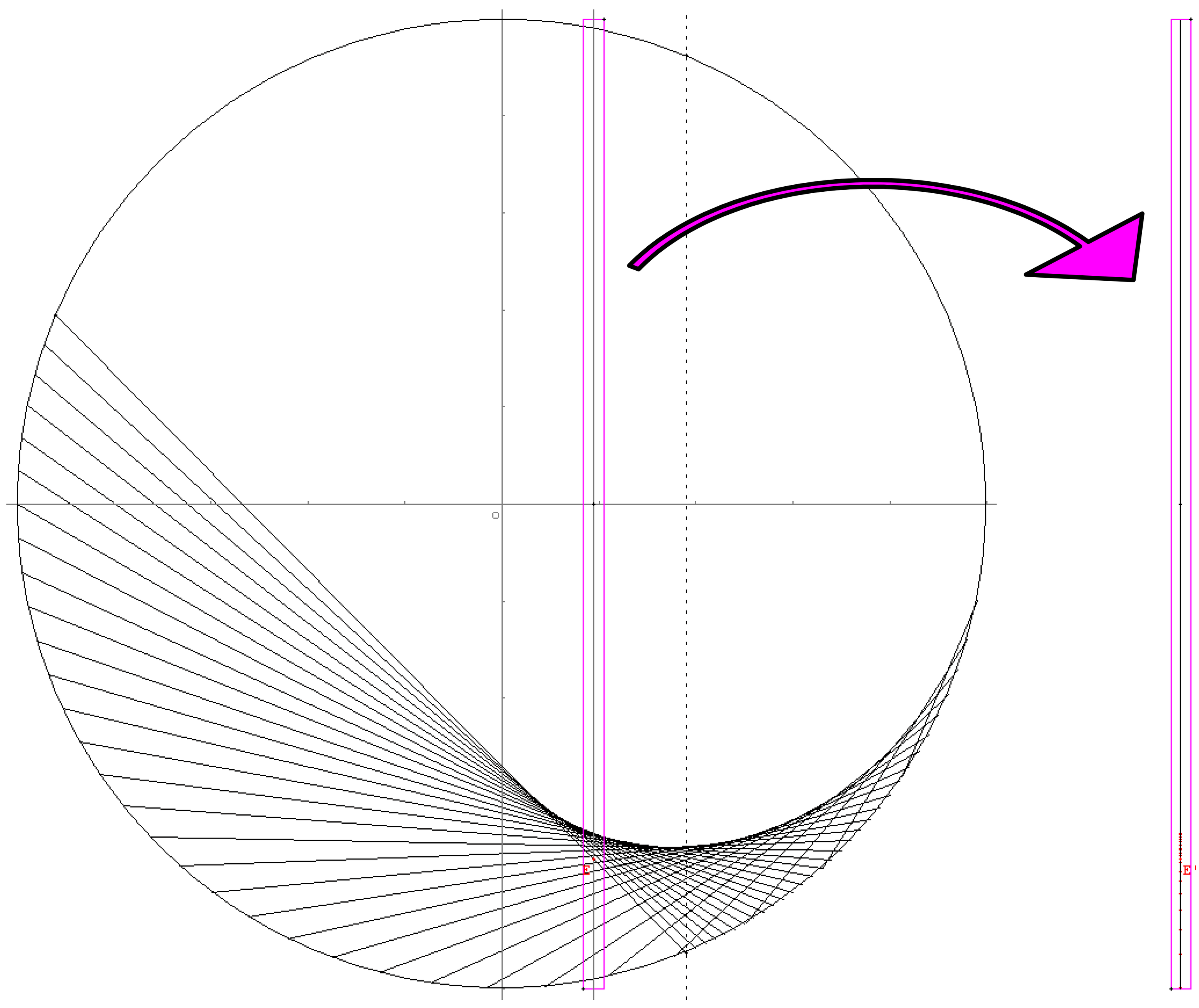


D'après la loi de Descartes sur le principe de la réflexion, l'angle incident et l'angle réfléchi sont égaux.

Dans notre cas, cet angle commun α vaut $\arcsin\left(\frac{t}{5}\right)$

Après quelques calculs d'angles, on trouve la pente de la droite $m=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$

Et enfin l'équation de la droite réfléchie $y=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)x-\sqrt{25-t^2}-m\cdot t$



La grande idée

Ensuite, nous avons remarqué que, pour un x donné, il existe plusieurs droites réfléchies contenant un point d'abscisse x, mais un seul de ces points est sur la caustique. Ce point est « le plus haut », autrement dit celui qui est le plus proche de l'axe des abscisses.

Les extremums sont là où la dérivée s'annule. Donc, si on dérive l'équation des droites de l'enveloppe par rapport à t et en regardant où cette dérivée s'annule, on peut espérer obtenir le point « le plus haut » qui est sur la caustique.

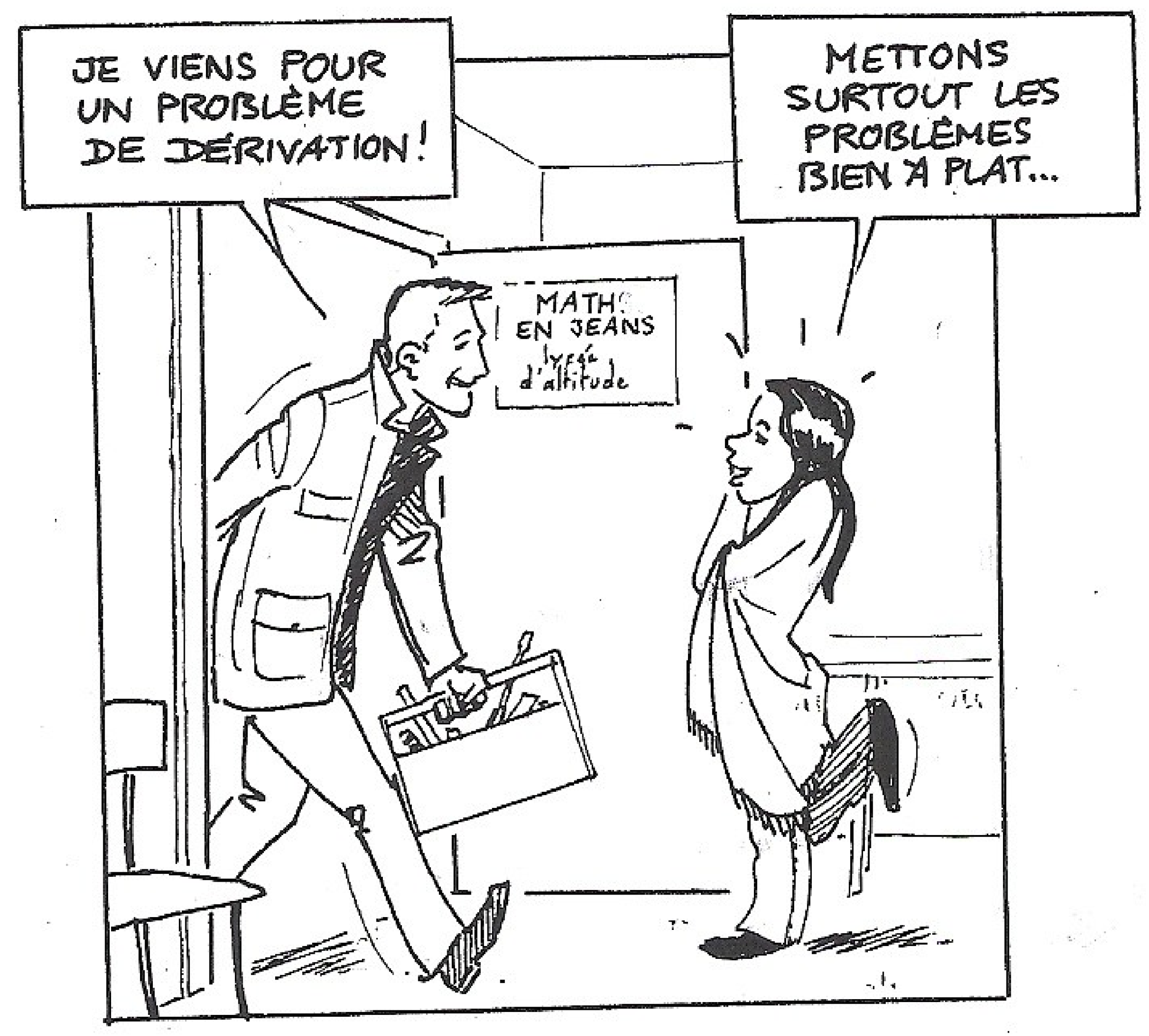
Travail de recherche et d'expérimentation qui dure toute l'année

Que du bonheur...

Nous devions dériver par rapport à t l'équation de droite suivante :

$$y = \tan\left(2\arcsin\left(\frac{t}{5}\right) - \frac{\pi}{2}\right) x - \sqrt{25-t^2} - \tan\left(2\arcsin\left(\frac{t}{5}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\cdot t$$

On vous passe les calculs ; on obtient : $y' = m'x + p'$



avec $m' = \dfrac{2/5}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{25}}} \times \dfrac{1}{cos^2\left(2\arcsin\left(\dfrac{t}{5}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right)}$

et $p' = \dfrac{t}{\sqrt{25-t^2}} - m'\cdot t - \tan\left(2\arcsin\left(\dfrac{t}{5}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right)$

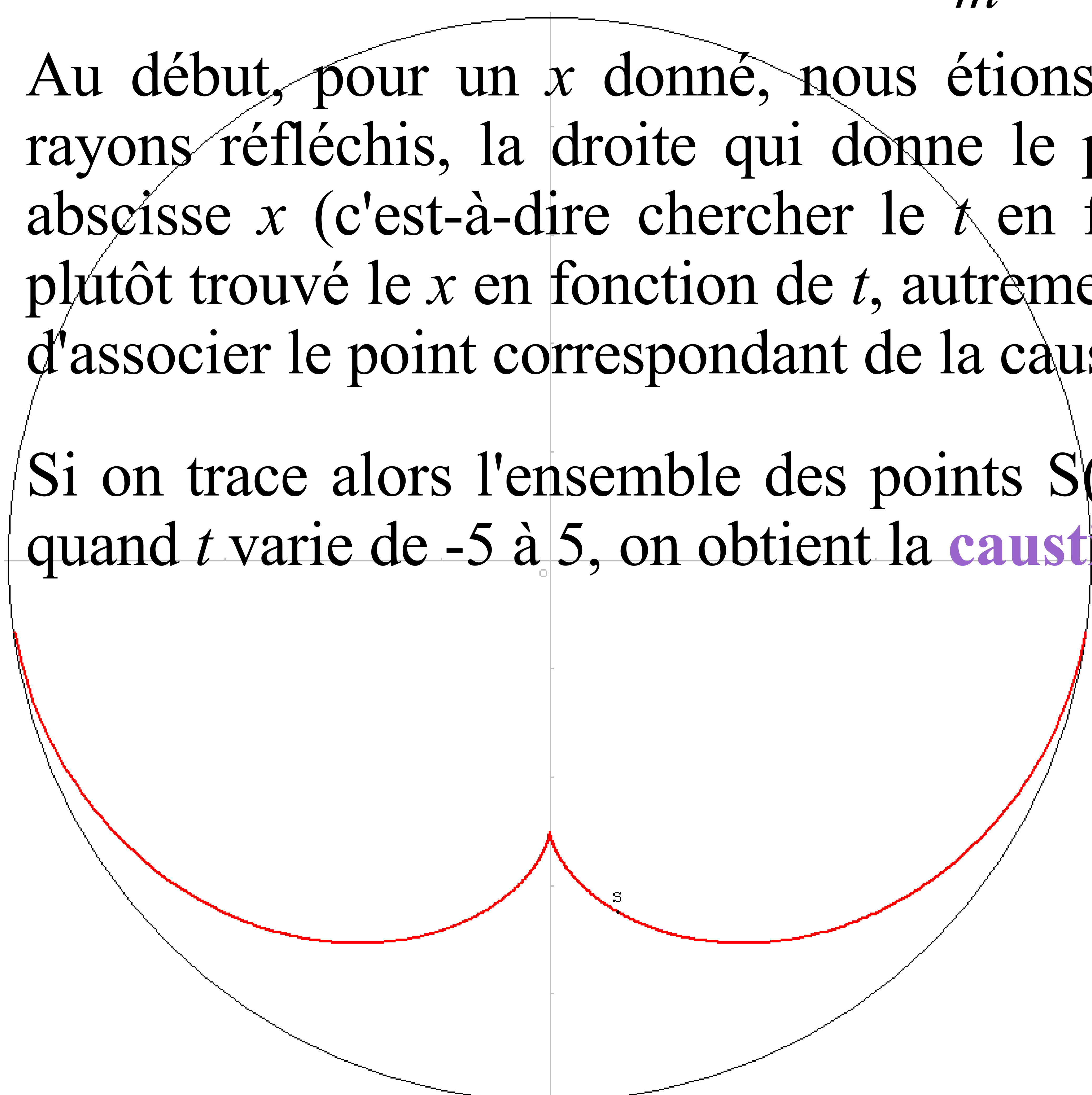
Il nous reste maintenant à résoudre en t l'équation $m'x + p' = 0$

En fait, on remarque que la résolution en x semble être

bien plus facile qu'en t car on a $x = \dfrac{-p'}{m'}$

Au début, pour un x donné, nous étions partis pour chercher, parmi les rayons réfléchis, la droite qui donne le point de la caustique ayant pour abscisse x (c'est-à-dire chercher le t en fonction de x). Finalement, on a plutôt trouvé le x en fonction de t, autrement dit à un t donné on est capable d'associer le point correspondant de la caustique.

Si on trace alors l'ensemble des points S($x(t)$; $y(t) = m(t)x(t) + p(t)$) quand t varie de -5 à 5, on obtient la **caustique**.



Discussion avec des chercheurs et des élèves lors du congrès