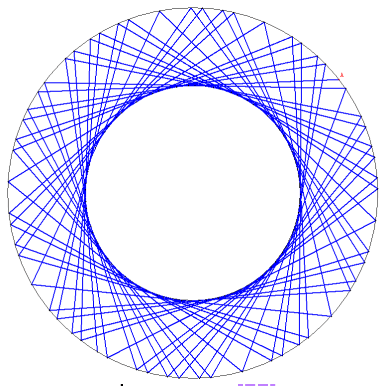
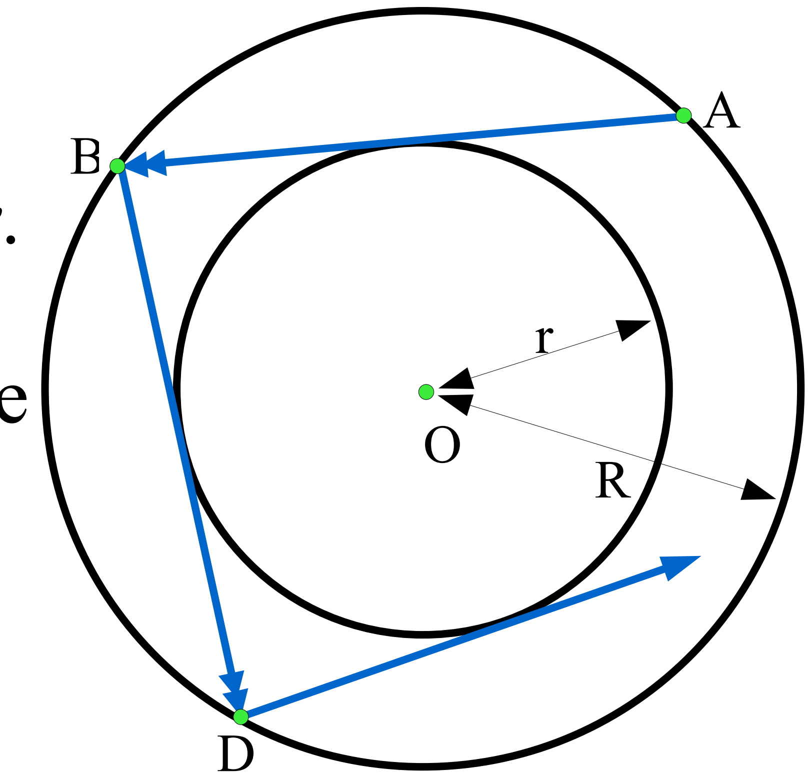


Problème de fermeture

par Marie LACROIX, élève de première S.

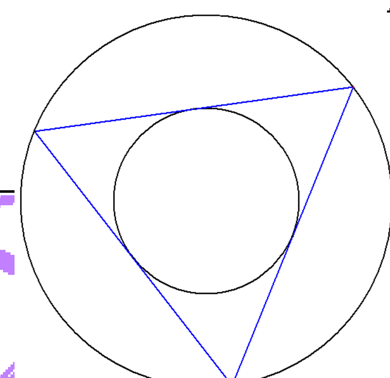
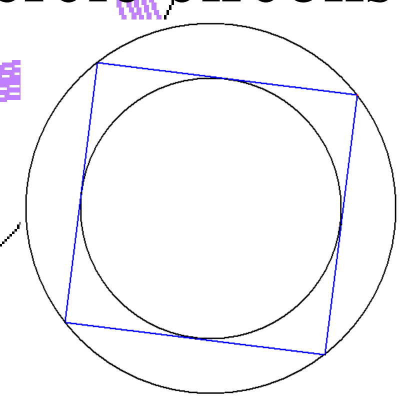
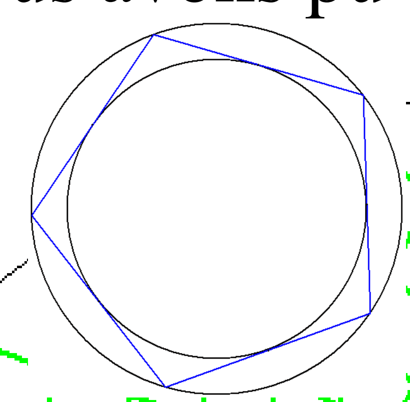
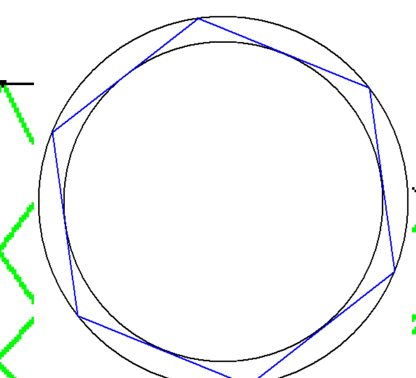
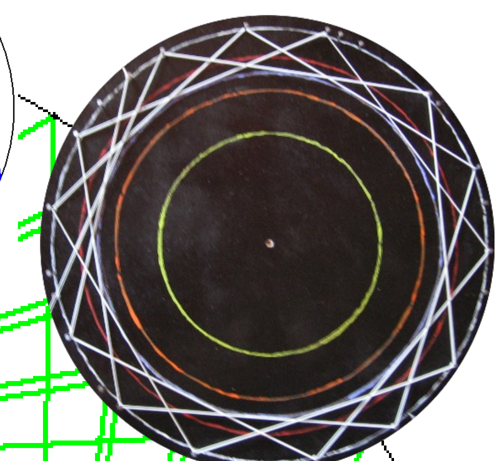


Imaginons deux cercles C et c de même centre O et de rayons respectifs R et r avec $R>r$.
Soit A un point du cercle C. Nous traçons une tangente au cercle c passant par A.
L'intersection entre le cercle C et de cette tangente nous donne le point B. Avec le même principe, en partant de B nous obtenons D.
On s'est demandé si en renouvelant le processus nous retrouvions le point A.

Démarche :

Présentation lors du congrès à l'Université de Cergy-Pontoise

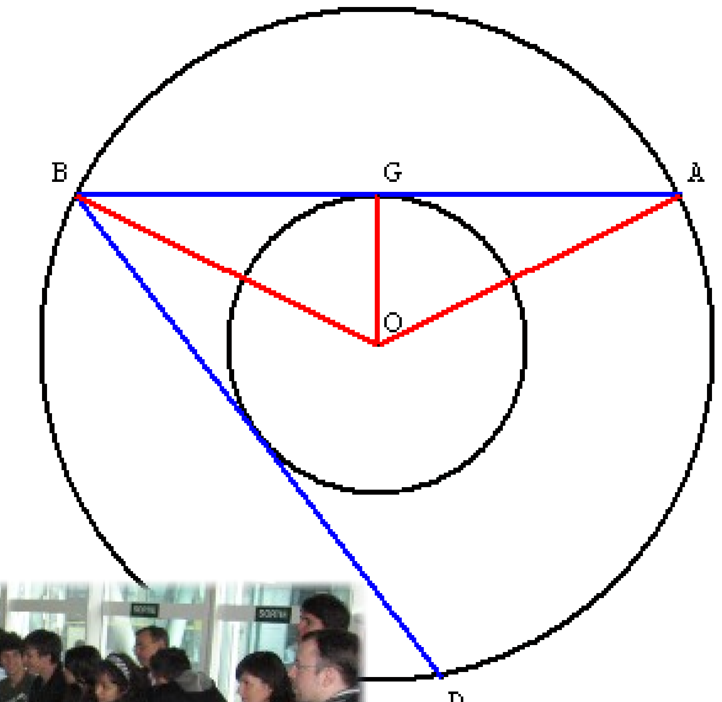
En travaillant sur des polygones réguliers et en regardant le rapport des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit, nous avons pu conjecturer un résultat.

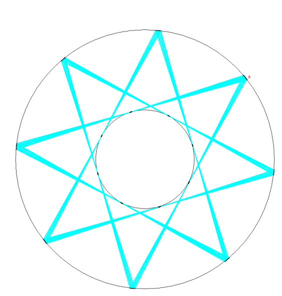
$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad \frac{r}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \frac{r}{R}=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \frac{r}{R}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Conjecture : pour obtenir un polygone régulier à n côtés il faut et il suffit que $\frac{r}{R}=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Démonstration :



A partir de la figure ci-contre, nous avons démontré la conjecture :
- le sens direct : si notre figure est un polygone régulier à n côtés, alors le rapport du cercle inscrit sur le cercle circonscrit est $\cos(\pi/n)$
- la réciproque : si r/R vaut $\cos(\pi/n)$ alors on obtient un polygone régulier à n côtés



Question :

Le rapport r/R étant donné, existe-t-il un entier n tel que $\frac{r}{R}=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$?