La géométrie tropicale

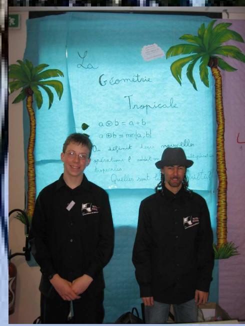
Par Florian ROSIER et Lilian BESSON

Sujet :

On définit deux nouvelles opérations : a ⊕ b = min{a;b} et a ⊗ b = a+b

Par exemple : 3⊕7=3, 3⊗7=10

Que deviennent les objets mathématiques traditionnels avec ces nouvelles opérations ?



Partie numérique :

La commutativité :

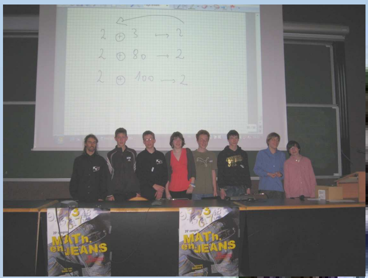
b⊕a =min{b;a}=min{a;b} = a⊕b

a⊗b=a+b=b+a=b⊗a

L'associativité :

(a⊕b)⊕c = min{min (a;b);c}=min {a;b;c}=a⊕b⊕c=a⊕(b⊕c)

(a⊗b)⊗c = a+b+c =a⊗(b⊗c)



Les trois établissements jumelés sur ce sujet : Gap, Stockholm et Briançon

La distributivité :

Propriétés : pour a, b et α positifs,

min{α×a ; α×b}=α×min{a;b} et min{α+a ; α+b}=α+min{a;b}.

a⊗(b⊕c)=a⊗(min{b;c})=a+min{b;c}

d'autre part (a⊗b)⊕(a⊗c)=min{a+b;a+c}= a+min{b;c}

ainsi a⊗(b⊕c)=(a⊗b)⊕(a⊗c)

Les puissances tropicales $x^{\check{n}}$:

$$x^{\check{n}} = x \otimes x \otimes x \otimes \ldots \otimes x = x+x+x+\ldots+ x = x\times n = n\,x$$

Application à l'identité remarquable :

$$(a\oplus b)^{\check{n}}=n\times(a\oplus b)=n\times\min\{a;b\}=\min\{n\times a\ ;\ n\times b\}=(a^{\check{n}}\oplus b^{\check{n}})$$

Les racines carrées :

$$\check{\sqrt{x^{\check{2}}}}=\check{\sqrt{2\times x}}=x \text{ donc } \check{\sqrt{x}}=\frac{x}{2}$$

Les lois réciproques :

Comme la multiplication tropicale correspond à l'addition normale, on sait que l'élément neutre de notre multiplication tropicale est le 0 : a⊗0= a+0=a

la division tropicale revient alors à la soustraction “traditionnelle”

Pour définir la soustraction tropicale de symbole Θ, on doit chercher l'opération réciproque à l'addition tropicale.

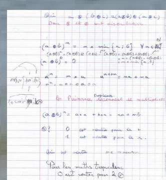
Par exemple :

2⊕3=min{2;3}=2

2⊕7=min{2;7}=2

Plusieurs opérations donnent le même résultat, une image possède donc plusieurs antécédents. 2Θ2=3 ou 2Θ2=7

Par conséquent il nous est impossible de retrouver l'antécédent qui nous convient. Autrement dit la soustraction tropicale n'existe pas.



Extrait du cahier de recherche des élèves

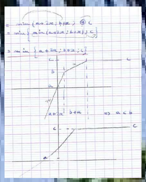
Vidéo-conférence avec Stockholm

Présentation au pôle universitaire de Gap

Partie géométrique :

La représentation graphique des fonctions affines tropicales, $y = a \otimes x \oplus b = \min\{a+x\ ;\ b\}$ va donner des objets que nous appellerons droite tropicale.

De même les polynômes du second degré, $y = (a \otimes x^2) \oplus (b \otimes x) \oplus c = \min\{a+2x\ ;\ b+x\ ;\ c\}$ vont donner des graphiques comme ci-dessous.



$y = 2 \otimes x^2 \oplus 3 \otimes x \oplus 5 = \min\{2+2x\ ;\ 3+x\ ;\ 5\}$

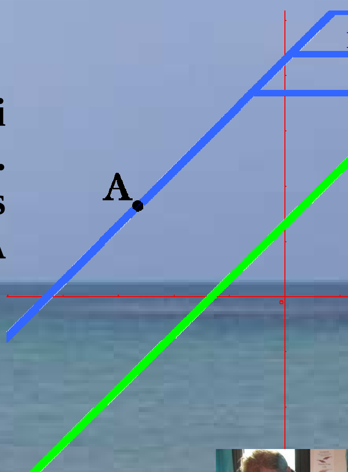
Nous avons une fonction en trois parties :
d'abord $a+2x=2+2x$ tant que $a+2x > b+x$ soit $x > b-a$
ensuite $b+x=3+x$ quand $b-a<x<c-b$
et enfin $c=5$ quand $x > c-b$

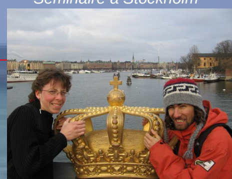

Présentation en amphi

Un polynôme tropical,
$P(x) = a_n \otimes x^n \oplus a_{n-1} \otimes x^{n-1} \oplus \ldots \oplus a_1 \otimes x \oplus a_0 = \min\{a_n + nx\ ;\ a_{n-1}+(n-1)x\ ;\ldots;\ a_1+x\ ;\ a_0\}$
nous donnera une succession de droites avec des pentes décroissantes de n à 0.

Travail sur les droites :

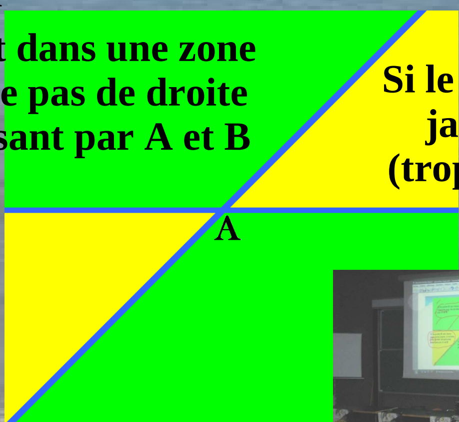
Nous dirons que deux droites tropicales sont parallèles si elles ne se coupent en aucun point.
Nous avons remarqué qu'il existe plusieurs droites parallèles à une droite donnée d et passant par un point A extérieur à cette droite.




Séminaire à Stockholm

Autre petite différence avec la géométrie euclidienne, deux points ne sont pas forcément alignés... en géométrie tropicale.

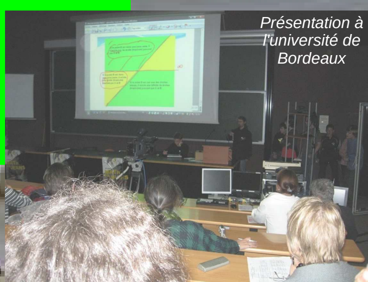
Si le point B est dans une zone verte, il n'existe pas de droite (tropicale) passant par A et B



Si le point B est dans une zone jaune, il existe une droite (tropicale) passant par A et B


Discussion avec un chercheur

Si le point B est sur une des droites bleues, il existe une infinité de droites (tropicales) passant par A et B


Présentation à l'université de Bordeaux


Répétition avant la présentation