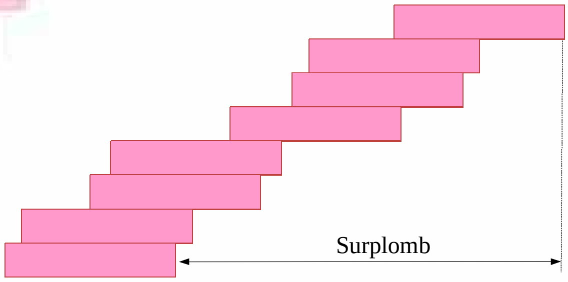
LES SURPLOMBS

Par **Jean Mutillod et Thomas Duez**

Problème :

Comment avoir un surplomb maximal avec un nombre de pièces minimal ?
Où est la limite d'un surplomb ?

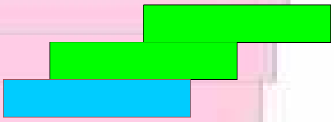
Exposé oral à l'université de Bordeaux



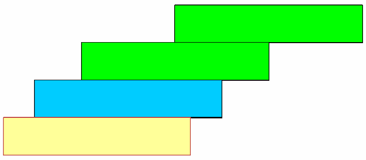
Expérimentation :

Nous sommes partis sur cette piste : pour qu'un édifice tienne en équilibre, il faut que le poids de l'ensemble des pièces formant le surplomb soit réparti de moitié au-dessus du vide et de moitié sur la pièce de support (si plus, l'édifice s'écroule, si moins, le surplomb ne sera pas maximal).

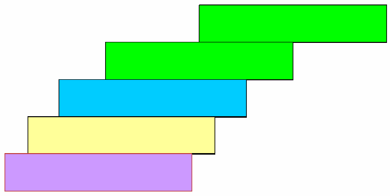
Avec 2 pièces de Kapla, pour avoir un surplomb maximal et garder une stabilité, il faut que la deuxième pièce soit posée au niveau de la moitié de la première



Avec 3 pièces, on pose le précédent édifice (2 pièces) sur une troisième au niveau de son quart.

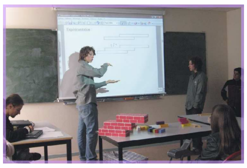


Avec 4 pièces, on pose le précédent édifice (3 pièces) sur une quatrième pièce au niveau de son sixième.



Avec 5 pièces, on pose le précédent édifice (4 pièces) sur une cinquième pièce au niveau de son huitième.

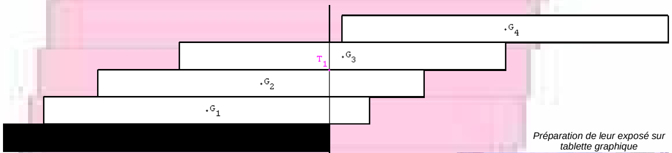
Travail de recherche au lycée



Présentation de leurs recherches

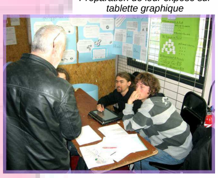
Vérification sur ordinateur :

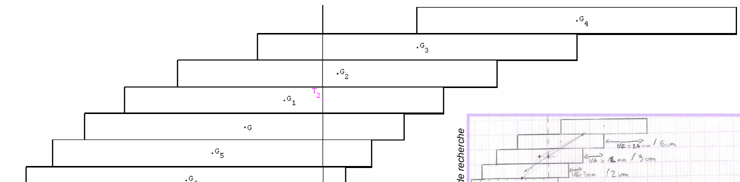
Avec l'aide d'un logiciel de géométrie, on a pu vérifier que le centre de gravité de l'édifice était à l'aplomb de la pièce le supportant (pièce noire).



Surplomb à 5 pièces

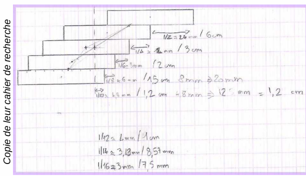
Préparation de leur exposé sur tablette graphique





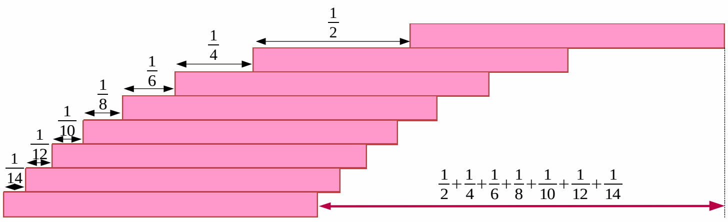
Surplomb à 8 pièces

Copie de leur cahier de recherche



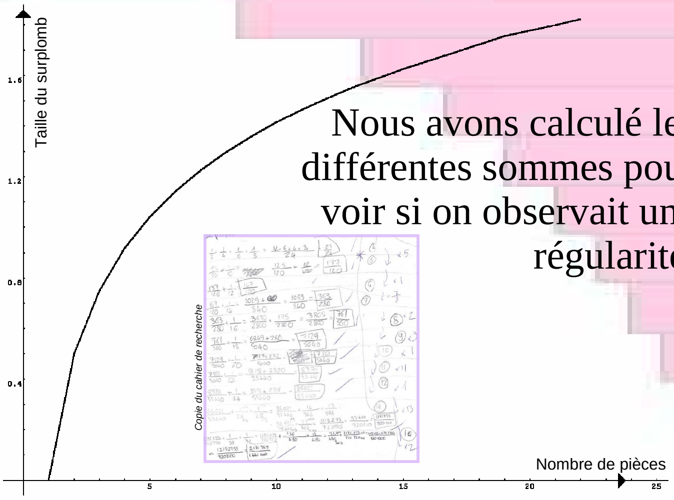
Somme des valeurs :

Pour connaître la dimension de notre surplomb en fonction du nombre de pièces, il faut faire la somme des différentes « marches » que nous avons construites.



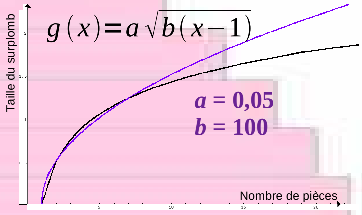
Recherche de formules :

L'approche du graphe des résultats par une fonction racine ou une branche d'hyperbole ne nous a pas paru satisfaisante.

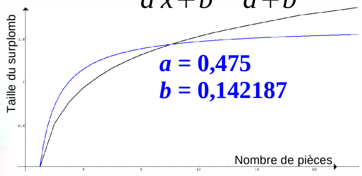


Nous avons calculé les différentes sommes pour voir si on observait une régularité.

Copie du cahier de recherche



$$f(x)=\frac{1}{ax+b}-\frac{1}{a+b}$$




Séminaire à l'IREM de Marseille

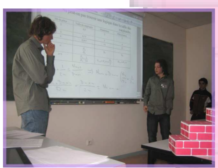
Nombre de pièces	Taille du surplomb	Numérateur	Dénominateur
2	0,500	1	2
3	0,750	3	4
4	0,917	11	12
5	1,042	50	48
6	1,142	274	240
7	1,225	1764	1440
8	1,296	13068	10080
9	1,359	109584	80640
10	1,414	1026576	725760
11	1,464	10628640	7257600
12	1,510	120543840	79833600
13	1,552	1486442880	958003200
14	1,590	19802759040	12454041600
15	1,626	283465647360	174356582400
16	1,659	4339163001600	2615348736000
17	1,690	70734282393600	41845579776000
18	1,720	1223405590579200	711374856192000
19	1,748	22376988058521600	12804747411456000
20	1,774	431565146817638000	243290200817664000
21	1,799	8752948036761600000	4865804016353280000
22	1,823	186244810780170000000	102181884343419000000
23	1,845	4148476779335460000000	2248001455555220000000
24	1,867	96538966652493100000000	51704033477770000000000
25	1,888	2342787216398720000000000	1240896803466480000000000
26	1,908	59190128811701200000000000	31022420086662000000000000
27	1,927	1554454559147560000000000000	806582922253211000000000000
28	1,946	42373564558110800000000000000	21777738900836700000000000000
29	1,964	1197348677077520000000000000000	609776689223428000000000000000
30	1,981	35027999979859800000000000000000	17683523987479400000000000000000
31	1,997	1059681761389530000000000000000000	530505719624382000000000000000000
32	2,014	33115387462887700000000000000000000	16445677308355800000000000000000000

En refaisant nos calculs, nous obtenons le tableau ci-contre (fraction non simplifiée).
Nous avons ainsi remarqué une logique au dénominateur et au numérateur qui nous a conduits aux formules suivantes :

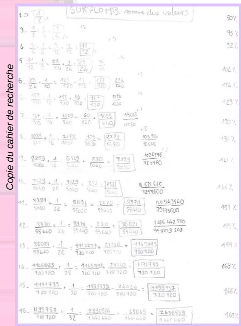
Nb de pièces	Taille du surplomb	Numérateur	Dénominateur
n	$\frac{N_n}{D_n}$	N_n	D_n
$n+1$	$\frac{N_n}{D_n}+\frac{1}{2n}$	$N_{n+1}=N_n\times n+\frac{D_n}{2}$	$D_{n+1}=D_n\times n$

Discussion avec des chercheurs

En prolongeant cette formule sur tableur, nous arrivons à 2,85 pour n=171 pièces. Le dénominateur est alors $1{,}47.10^{307}$


Présentation au congrès national


Échange avec d'autres élèves



Copie du cahier de recherche

Conjecture :

Nous pouvons réaliser le surplomb aussi grand que l'on veut.

Démonstration :
Suite au congrès national *MATh.en.JEANS*, des chercheurs nous ont proposé des pistes de recherche pour la démonstration.


Présentation avec les élèves du collège Jean Jaurès de La Ciotat


Exposé oral à l'université de Bordeaux

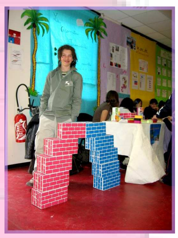
Remarque : si $n<m$ alors $\frac{1}{n}>\frac{1}{m}$

Regrouper astucieusement les termes de la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}_{>1/4}+\underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}}_{>1/4}+\underbrace{\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{32}}_{>1/4}+\underbrace{\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{64}}_{>1/4}+\ldots$

En effet d'après la remarque

$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ $\quad\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{16}>4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$ $\quad\frac{1}{18}+\ldots+\frac{1}{32}>8\times\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$ $\quad\frac{1}{34}+\ldots+\frac{1}{64}>16\times\frac{1}{64}=\frac{1}{4}$

Ainsi de suite, nous pouvons avec suffisamment de termes obtenir une somme qui est supérieure à autant de fois que l'on veut 1/4.



Autrement dit nous pouvons réaliser un surplomb aussi grand que l'on veut.