

Les bulles de savon ou les plus courts chemins sur un polygone

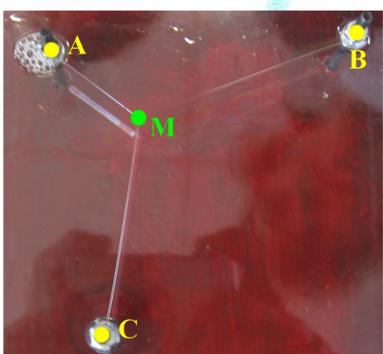
Par MUTILLOD Jean, DUEZ Thomas, GABORIAU Robin, RIPPERT Jean-Baptiste, DE NARDO Julien & GARDONI Florent, élèves de première S au Lycée d'Altitude.

Sujet

On considère un polygone P sur lequel on cherche à construire le plus court chemin passant par tous les sommets.

Physiquement cela revient à chercher comment un film de savon se disposerait pour relier tous les sommets d'un polygone.

Le cas du triangle

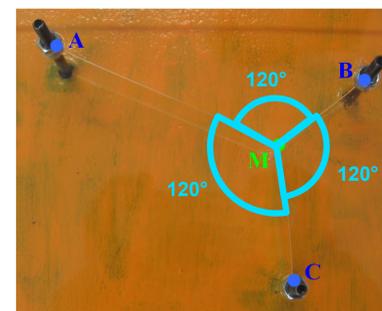


Maquette pour vérifier les résultats

On a un triangle ABC, on cherche à placer M tel que la distance $AM+BM+CM$ soit minimale.

Après de nombreux essais sur le logiciel Géoplan, nous avons remarqué que les 3 angles en M étaient égaux à 120° .

On appelle ce point le point de Torricelli.



Pour la démonstration nous avons fait une rotation de 60° de centre A des points B et M, pour obtenir les points B' et M'.

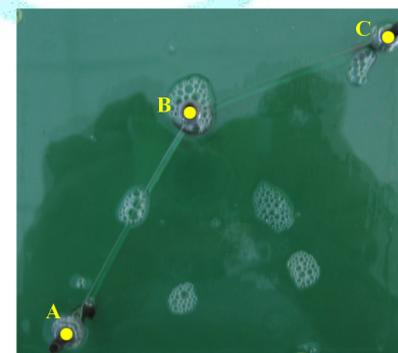
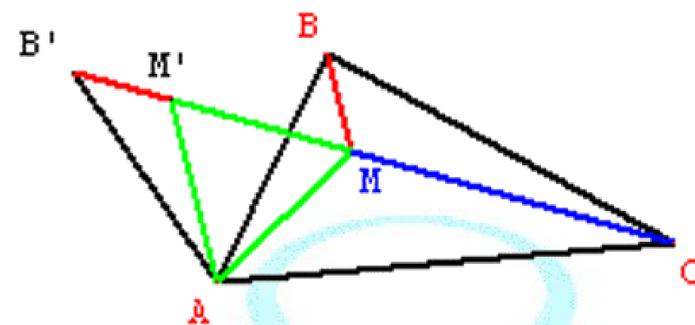
Ainsi $BM = B'M'$ et AMM' est équilatéral

Ce qui fait que $BM+AM+CM = B'M'+M'M+MC$

Or $B'M'+M'M+MC$ est minimal et vaut B'C quand les points M' et M sont alignés avec B' et C.

Justement si l'angle au centre est de 120° les points sont alignés.

Quand l'angle en B est supérieur à 120° , le plus court chemin est $BA+BC$ dans ce cas.



Présentation lors du congrès national à l'Université Joseph Fourier de Grenoble

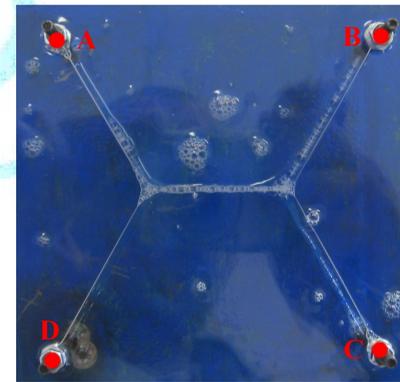
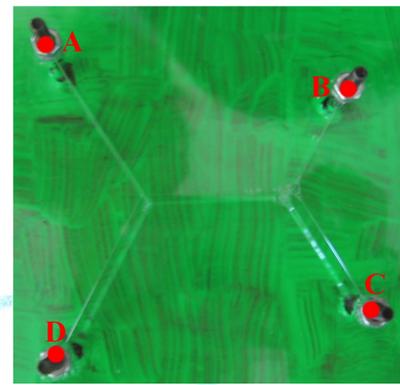


Présentation lors du forum des mathématiques de Biguglia (Corse)

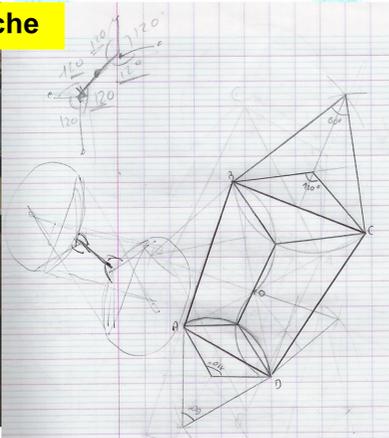
Les maquettes ont été construites après pour vérifier nos résultats.

Le cas du quadrilatère

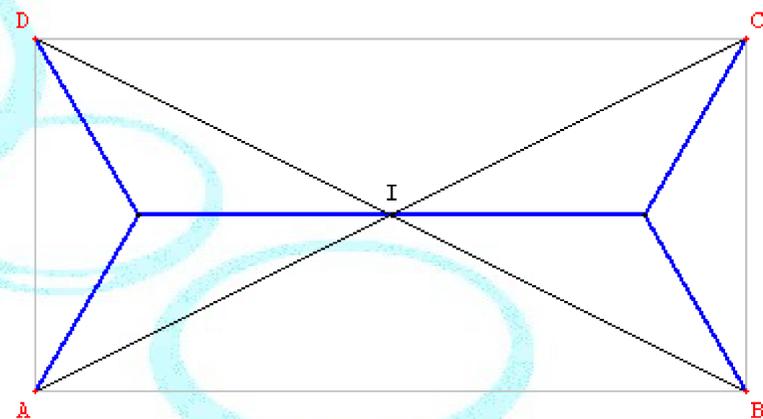
Une des grandes difficultés dans le cas du quadrilatère est que nous n'avons pas à chercher un point mais deux. En effet les plus courts chemins prennent une forme de sablier.



Travail de recherche

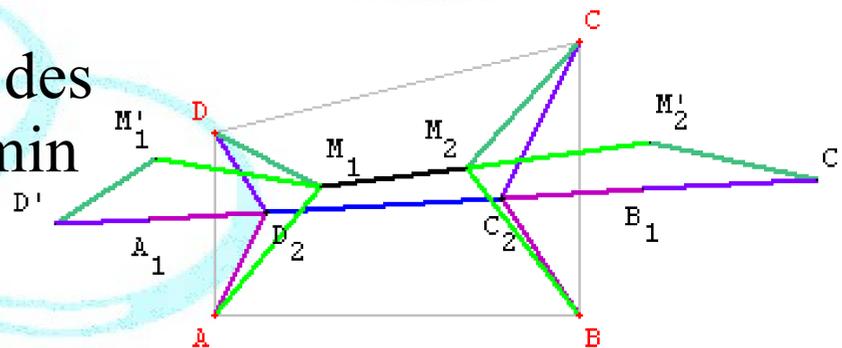


Répétition
Faites de la science



A force de plusieurs essais sur des rectangles et losanges, nous avons conjecturé que les angles de nos « sabliers » faisaient 120°

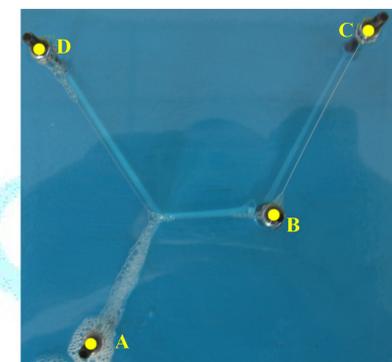
A partir de cette remarque et comme pour le cas des trois points, on a pu construire le plus court chemin et démontrer que c'était le meilleur.



Mais la difficulté que nous ne sommes pas encore parvenu à résoudre est celle de savoir sur quels côtés « s'appuie » notre sablier ?

Nous avons conjecturé que le sablier s'appuie sur les côtés dont la somme est la plus petite.

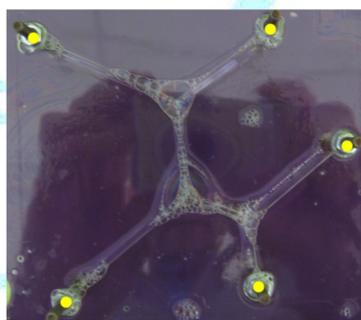
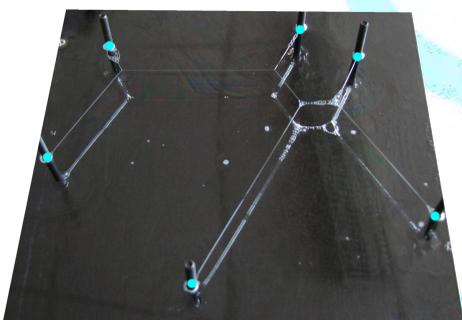
Comme pour le triangle nous avons quelques cas particuliers, par exemple quand un des sommets du quadrilatère se confond avec un des deux points du sablier.



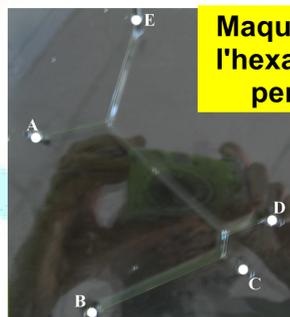
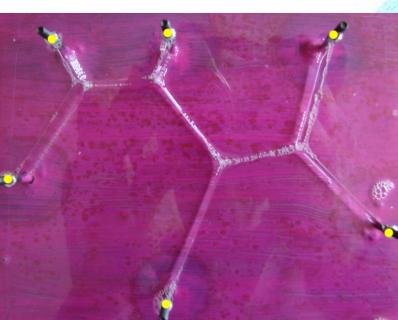
Les autres polygones



Maquette pour
vérifier les résultats



Le congrès nous a fourni une piste de recherche, il semblerait que pour un polygone à n côtés (sans angle trop grand), nous pouvons réaliser un graphe à $n-2$ points de Torricelli qui minimise les distances. Encore une piste à explorer.



Maquettes pour
l'hexagone et le
pentagone