



Les engrenages



Par Laetitia BERT, Adélaïde BICHON, Eva DUEZ, Florence HUCHON & Soazig LELIGNÉ
élèves de première et terminale S du Lycée d'Altitude de Briançon



Stand lors du congrès

Le sujet

On dispose d'engrenages ayant entre 15 et 30 dents, et on souhaite réaliser un montage (avec le minimum d'engrenages) de rapport 6,55957. Comment peut-on faire?

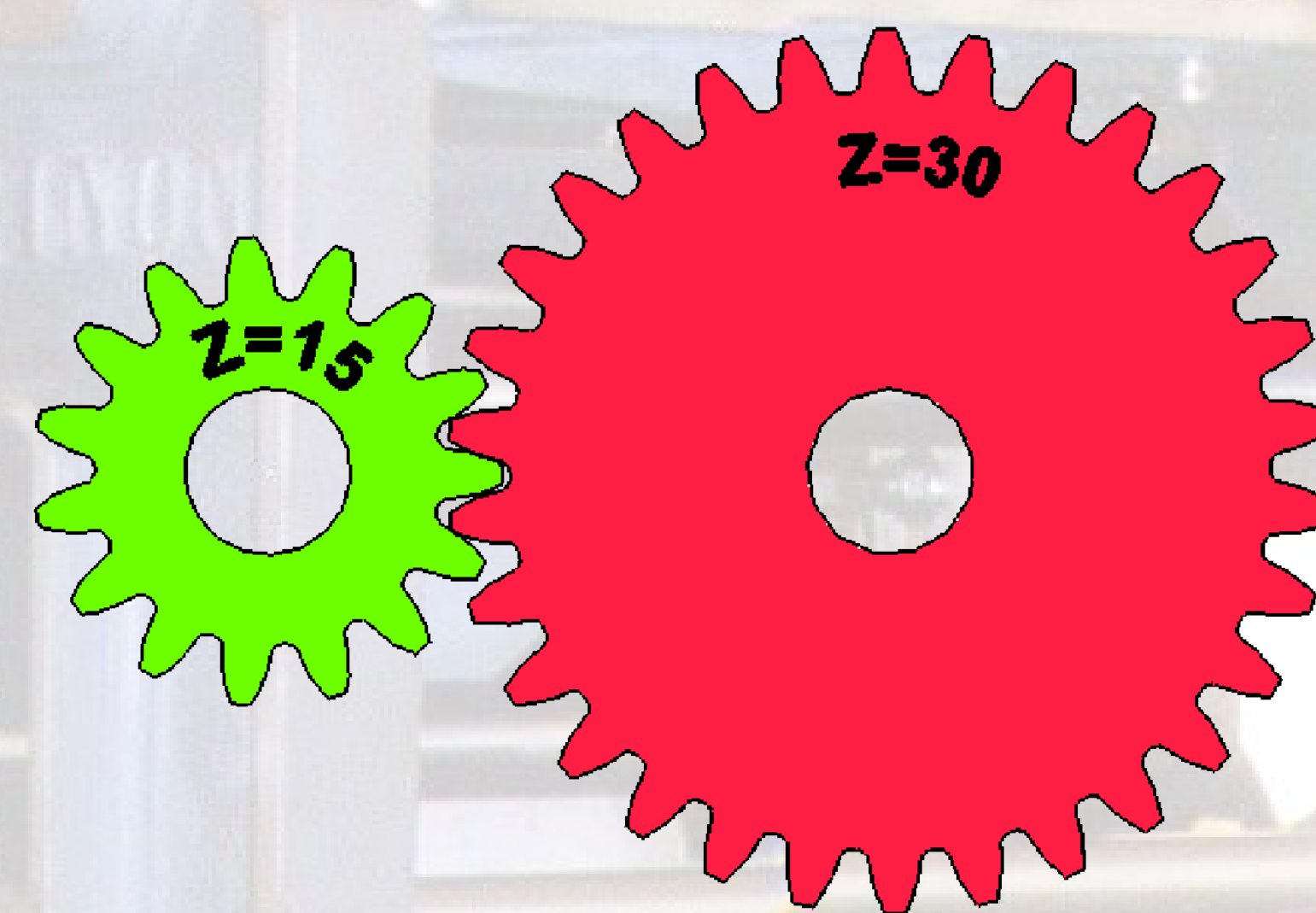
Exemples de rapports :

Rapport 2 (et 1/2)

Si l'on dispose les deux engrenages à 15 et 30 dents à la suite nous obtenons un rapport de

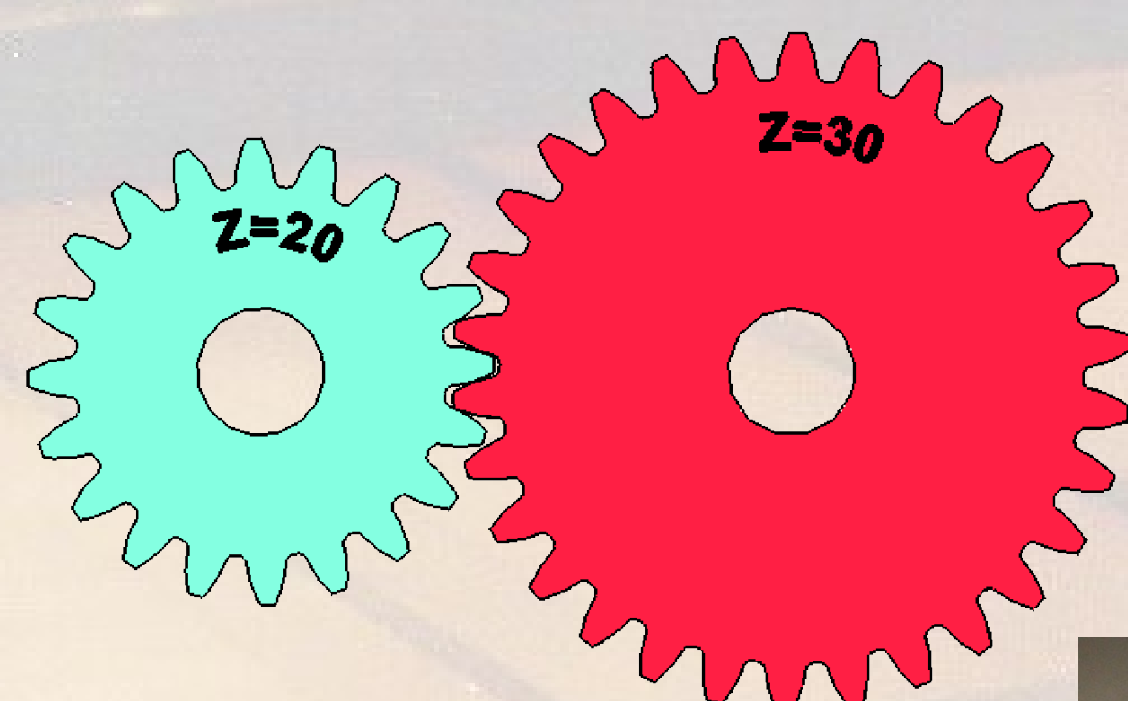
$$\frac{\text{nombre de dents roue 1}}{\text{nombre de dents roue 2}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Autrement dit quand la roue verte (1) fait 3 tours, la roue rouge (2) en fera $3 \times (1/2) = 1,5$ tours



Remarque : inversement quand la roue 2 fera 3 tours, la roue 1 fera $2 \times 3 = 6$ tours.

Ce qui veut dire que si on sait faire le rapport k , on sait faire le rapport $1/k$.

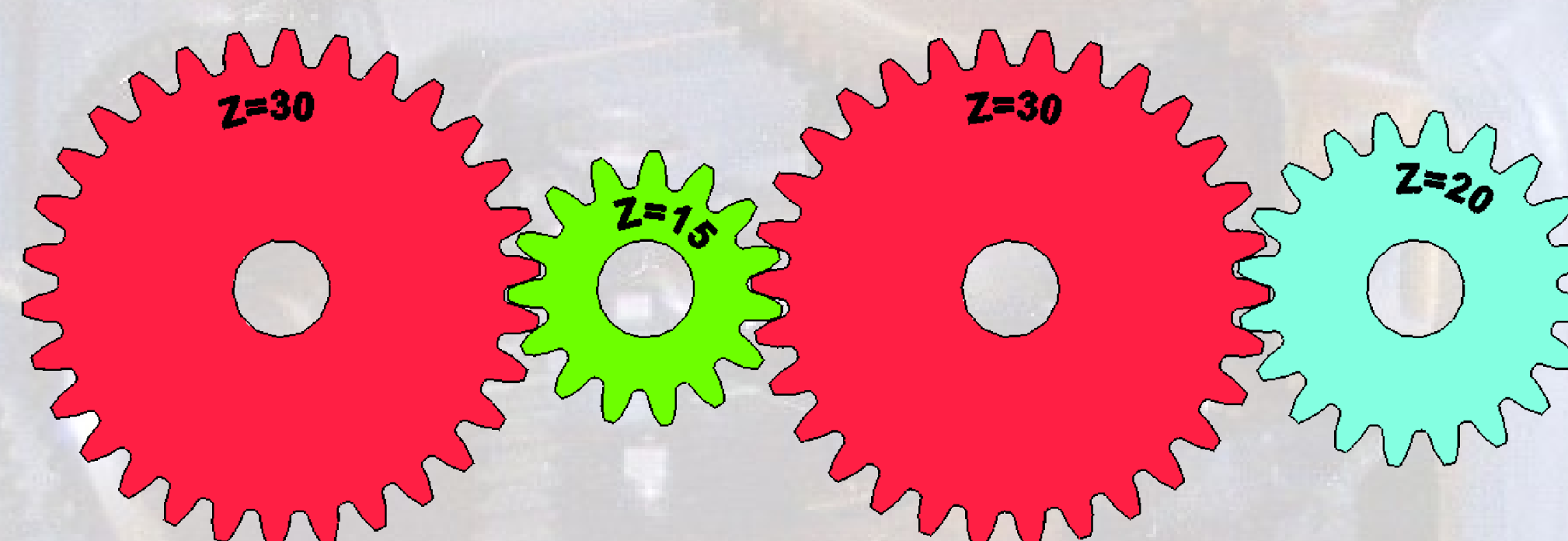


rapport $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

Vidéo conférence avec Stockholm et Culham

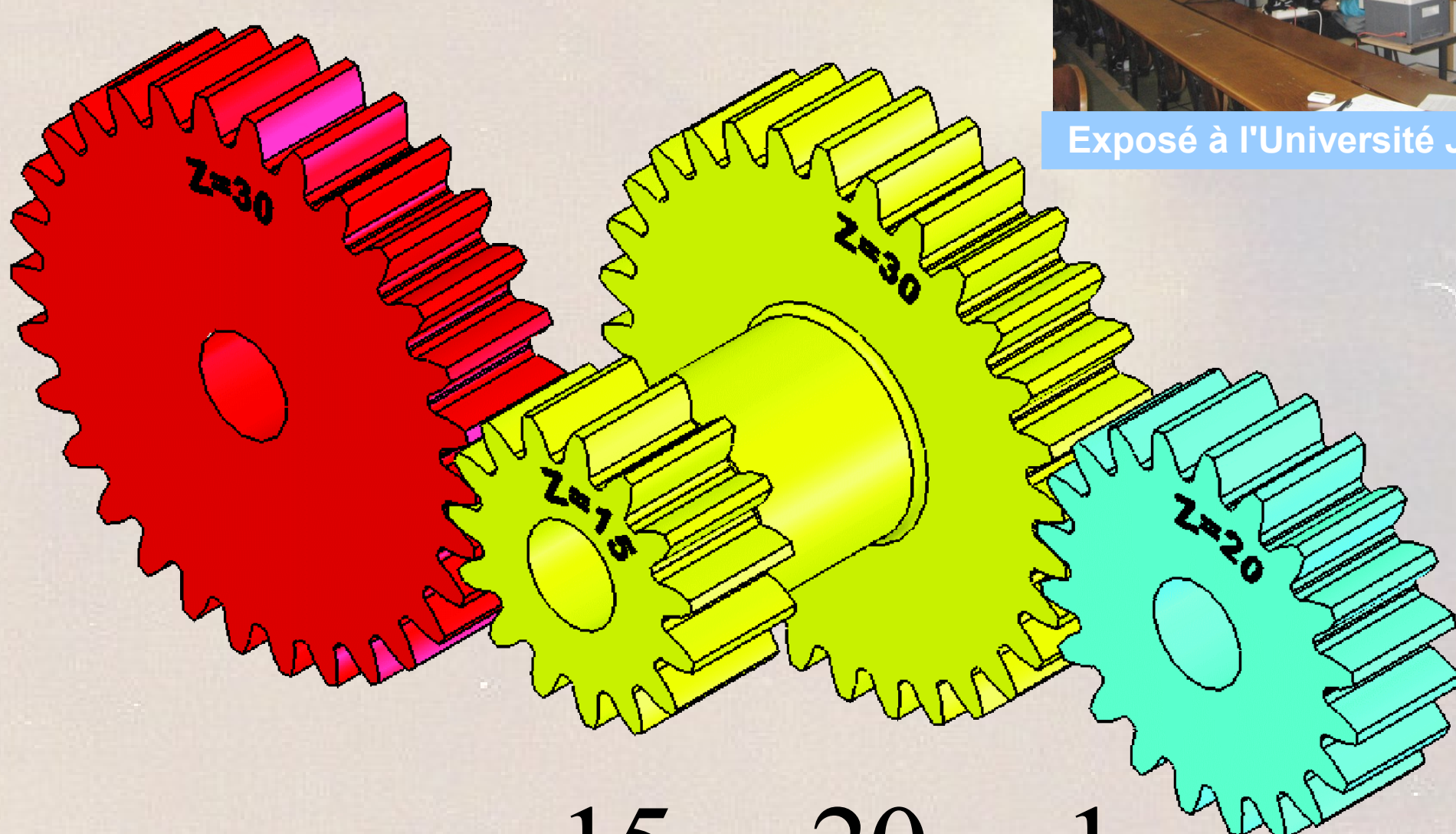


Exposé à l'Université Joseph Fourier



$$\text{rapport } \frac{15}{30} \times \frac{30}{15} \times \frac{20}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Les engrenages du centre ne servent à rien, ils ne font que transmettre.



rapport $\frac{15}{30} \times \frac{20}{30} = \frac{1}{3}$

Finalement notre sujet consiste à écrire 6,55957 comme produit de fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers compris entre 15 et 30.

Première piste de recherche :

Nous réalisons sous forme de tableau tous les quotients possibles (c'est-à-dire les rapports) en plaçant seulement deux engrenages.

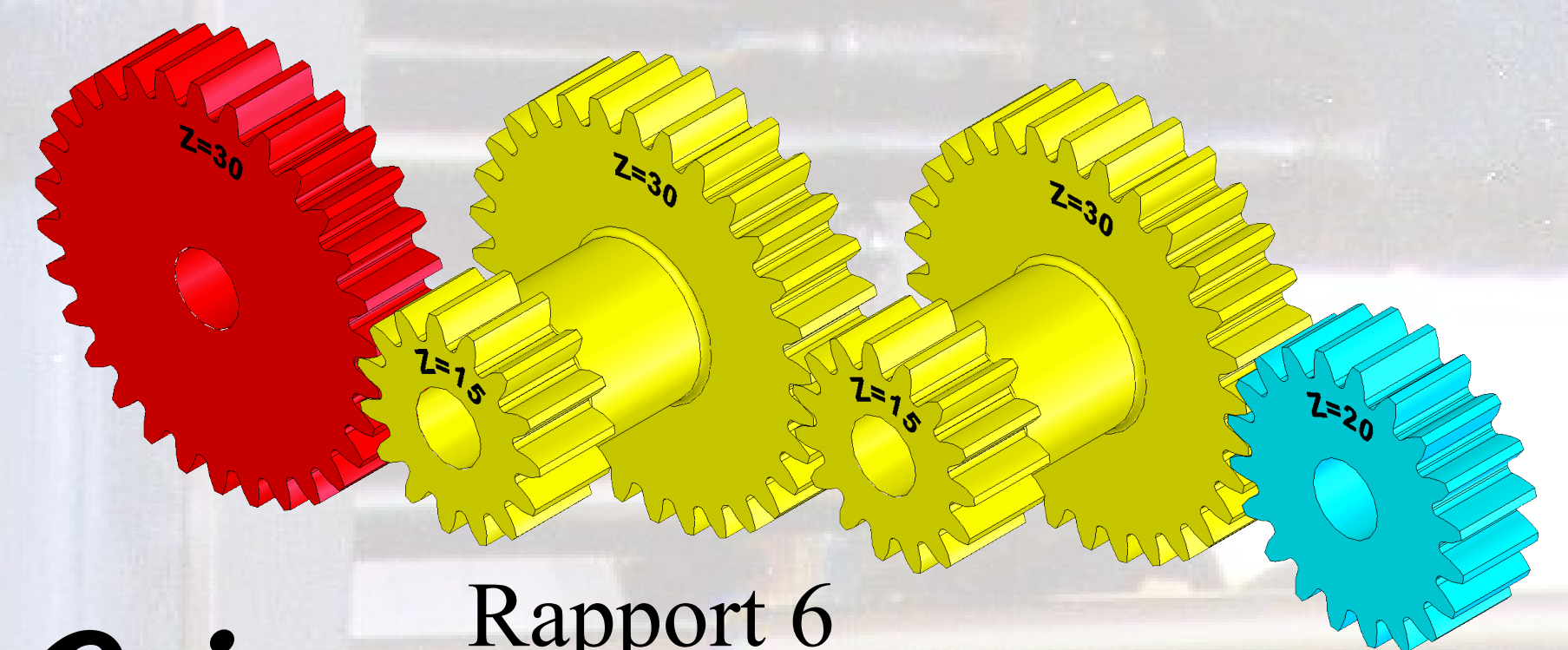
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
15	1,000000	0,937500	0,882353	0,833333	0,789474	0,750000	0,714286	0,681818	0,652174	0,625000	0,600000	0,576923	0,555556	0,535714	0,517241	0,500000
16	1,066667	1,000000	0,941176	0,888889	0,842105	0,800000	0,761905	0,727273	0,695652	0,666667	0,640000	0,615385	0,592593	0,571429	0,551724	0,533333
17	1,133333	1,062500	1,000000	0,944444	0,894737	0,850000	0,809524	0,772727	0,739130	0,708333	0,680000	0,653846	0,629630	0,607143	0,586207	0,566667
18	1,200000	1,125000	1,058824	1,000000	0,947368	0,900000	0,857143	0,818182	0,782609	0,750000	0,720000	0,692308	0,666667	0,642857	0,620690	0,600000
19	1,266667	1,187500	1,117647	1,055556	1,000000	0,950000	0,904762	0,863636	0,826087	0,791667	0,760000	0,730769	0,703704	0,678571	0,655172	0,633333
20	1,333333	1,250000	1,176471	1,111111	1,052632	1,000000	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,800000	0,769231	0,740741	0,714286	0,689655	0,666667
21	1,400000	1,312500	1,235294	1,166667	1,105263	1,050000	1,000000	0,954545	0,913043	0,875000	0,840000	0,807692	0,777778	0,750000	0,724138	0,700000
22	1,466667	1,375000	1,294118	1,222222	1,157895	1,100000	1,047619	1,000000	0,956522	0,916667	0,880000	0,846154	0,814815	0,785714	0,758621	0,733333
23	1,533333	1,437500	1,352941	1,277778	1,210526	1,150000	1,095238	1,045455	1,000000	0,958333	0,920000	0,884615	0,851852	0,821429	0,793103	0,766667
24	1,600000	1,500000	1,411765	1,333333	1,263158	1,200000	1,142857	1,090909	1,043478	1,000000	0,960000	0,923077	0,888889	0,857143	0,827586	0,800000
25	1,666667	1,562500	1,470588	1,388889	1,315789	1,250000	1,190476	1,136364	1,086957	1,041667	1,000000	0,961538	0,925926	0,892857	0,862069	0,833333
26	1,733333	1,625000	1,529412	1,444444	1,368421	1,300000	1,238095	1,181818	1,130435	1,083333	1,040000	1,000000	0,962963	0,928571	0,896552	0,866667
27	1,800000	1,687500	1,588235	1,500000	1,421053	1,350000	1,285714	1,227273	1,173913	1,125000	1,080000	1,039462	1,000000	0,964286	0,931034	0,900000
28	1,866667	1,750000	1,647059	1,555556	1,473844	1,400000	1,333333	1,272727	1,217391	1,166667	1,120000	1,076923	1,037037	1,000000	0,965517	0,933333
29	1,933333	1,812500	1,705882	1,611111	1,526316	1,450000	1,380952	1,318182	1,260870	1,208333	1,160000	1,115385	1,074074	1,035714	1,000000	0,966667
30	2,000000	1,875000	1,764706	1,666667	1,578947	1,500000	1,428571	1,363636	1,304348	1,250000	1,200000	1,153846	1,111111	1,071429	1,034483	1,000000

Dans ce tableau de rapports, nous avons repéré les rapports avec un chiffre après la virgule. Nous avons fait un nouveau tableau des quotients.

/	2	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
2	1	1,11	1,25	1,33	1,43	1,54	1,67	1,82	2,22	2,5	2,86	3,33	4
1,8	0,9	1	1,13	1,2	1,29	1,38	1,5	1,64	2	2,25	2,57	3	3,6
1,6	0,8	0,89	1	1,07	1,14	1,23	1,33	1,45	1,78	2	2,29	2,67	3,2
1,5	0,75	0,83	0,94	1	1,07	1,15	1,25	1,36	1,67	1,88	2,14	2,5	3
1,4	0,7	0,78	0,88	0,93	1	1,08	1,17	1,27	1,56	1,75	2	2,33	2,8
1,3	0,65	0,72	0,81	0,87	0,93	1	1,08	1,18	1,44	1,63	1,86	2,17	2,6
1,2	0,6	0,67	0,75	0,8	0,86	0,92	1	1,09	1,33	1,5	1,71	2	2,4
1,1	0,55	0,61	0,69	0,73	0,79	0,85	0,92	1	1,22	1,38	1,57	1,83	2,2
0,9	0,45	0,5	0,56	0,6	0,64	0,69	0,75	0,82	1	1,13	1,29	1,5	1,8
0,8	0,4	0,44	0,5	0,53	0,57	0,62	0,67	0,73	0,89	1	1,14	1,33	1,6
0,7	0,35	0,39	0,44	0,47	0,5	0,54	0,58	0,64	0,78	0,88	1	1,17	1,4
0,6	0,3	0,33	0,38	0,4	0,43	0,46	0,5	0,55	0,67	0,75	0,86	1	1,2
0,5	0,25	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,42	0,45	0,56	0,63	0,71	0,83	1

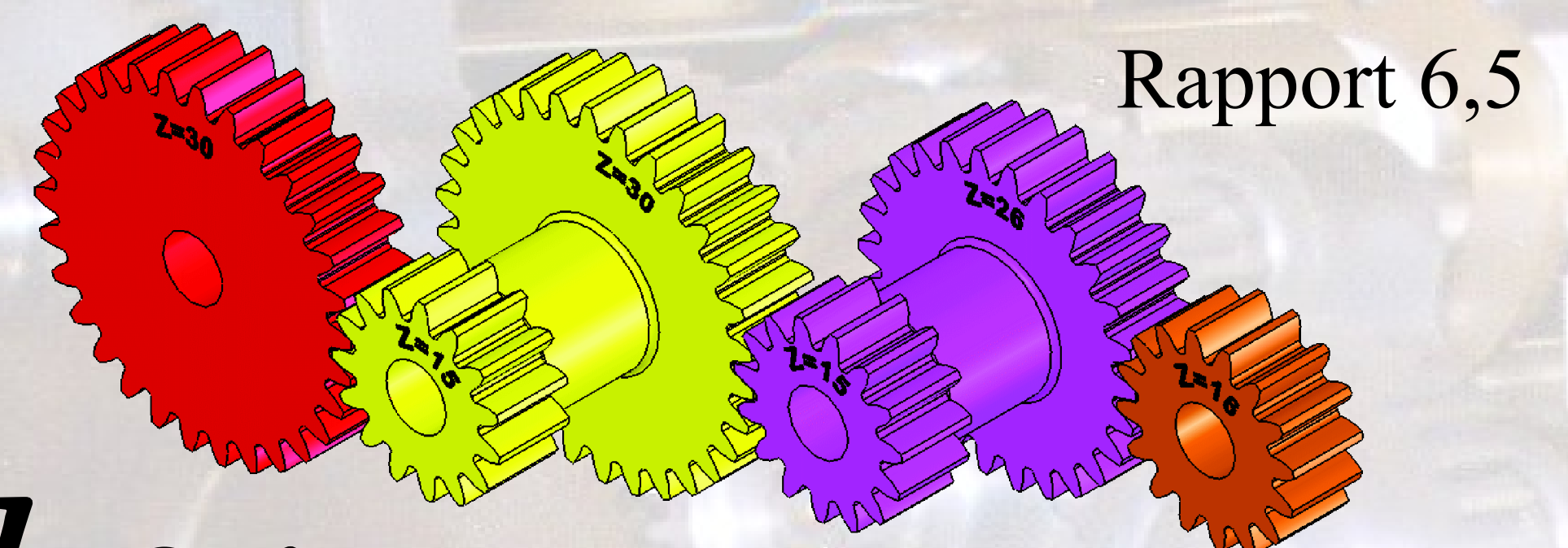
Nous ne sommes pas arrivés au rapport 6,55957 mais nous sommes en mesure d'enrichir la liste des valeurs « autorisées ».

Par exemple, nous sommes en mesure de faire le rapport 6 car $6=2 \times 3$ et 2 et 3 sont réalisables.



Deuxième piste de recherche :

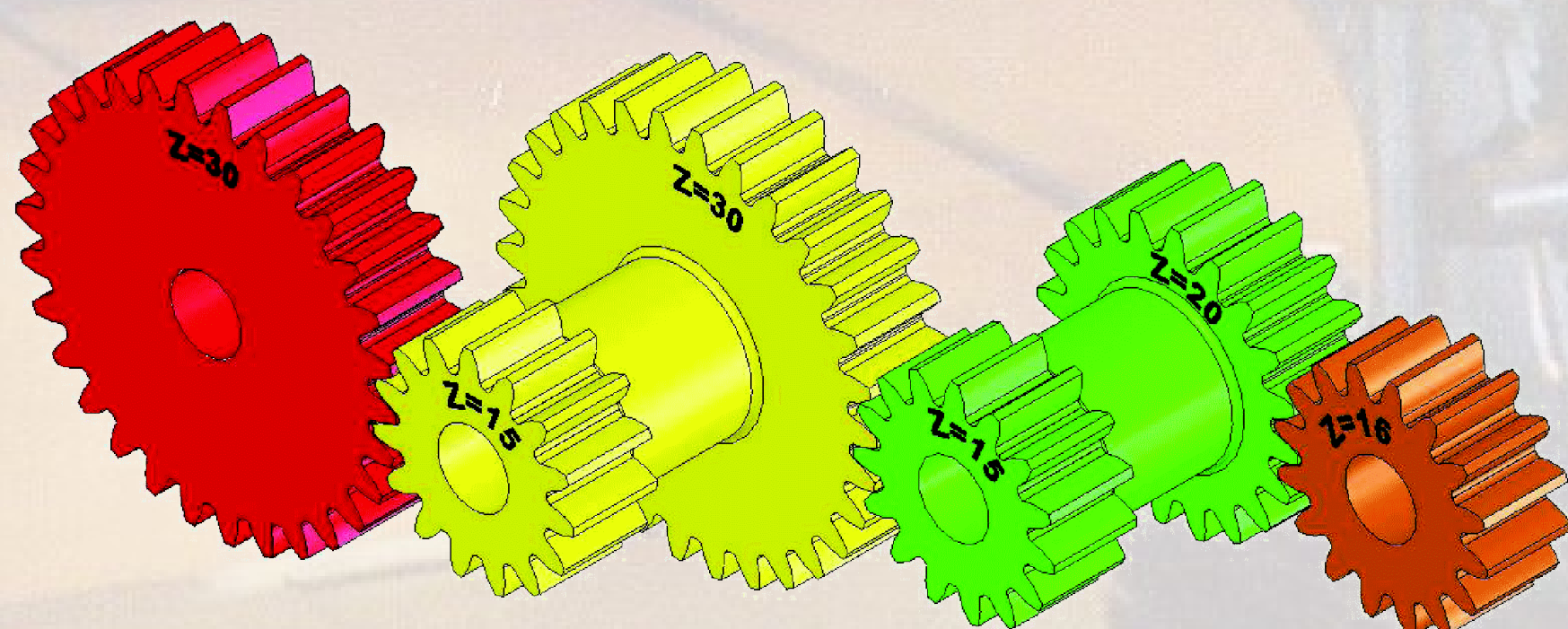
Nous avons vu que nous pouvons faire 6, mais peut-on réaliser le rapport 6,5 ? puis 6,55 ?



Troisième piste de recherche :

$$6,55957 = \frac{655957}{100000} = \frac{769 \times 853}{2^5 \times 5^5}$$

Il nous reste à faire 2 (déjà fait), 5, 769 et 853.



Rapport 5

Nombre premier	2	3	5	7	11	13
Rapport	$\frac{30}{15}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{20}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{20}{16}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{28}{16}$	$\frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{22}{16}$	$\frac{26}{20} \times \frac{30}{15} \times \frac{30}{20} \times \frac{30}{20} \times \frac{20}{16}$

Pour 17 (et tous les nombres premiers entre 15 et 30), on a remarqué que $17 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \frac{17}{16}$

Nos recherches ont buté sur 31, le premier nombre premier au-dessus de 30.

Clôture des recherches :

A force de rechercher le rapport 31 nous avons douté de la possibilité de le réaliser. On a regardé comment il faudrait le réaliser, en décomposant chacun des engrenages en produit de nombres premiers. Cette démarche nous a permis de démontrer que 31 est irréalisable ainsi que tous nombres premiers supérieurs à 31. Donc 6,55957 n'est pas réalisable.

Extrait du cahier de recherche

$31 = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$
 $[15, 30] = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = 31$
 $= 8 \times 8 \times 8 \times 17 \times 5 \times 4 \dots = 31$
 $= 8 \times 8 \times 4 \dots$
donc obligé d'avoir 31 en haut.
 $7 = 2 \times 3,5 = 6 \times 1,75 = 2 \times 2 \times \frac{7}{4}$
 $= \frac{30}{15} \times \frac{30}{15} \times \frac{13}{16}$