

# Les mouvements de foule

Par Marjorie, BICHON Adélaïde, MOUCHET Thiffany, AYME Natacha et BICHON Billy du lycée d'Altitude de Briançon

**Sujet :** Nous cherchons à modéliser et déterminer le temps moyen d'évacuation de 35 personnes de la salle de cours.

**SUIVEZ LES CONSIGNES QUI VOUS SERONT DONNEES**

**Hypothèses :** la salle possédant deux sorties (S1 et S2), nous supposons qu'un élève se dirigera vers la sortie la plus proche. Les élèves vont tous à la même vitesse (1 m/s) et il n'y a pas d'obstacle. Le temps d'évacuation de la salle correspondra donc au plus grand des temps de sortie des élèves.

Nous avons quadrillé la salle en cases de 50 cm, soit 13 cases sur 20 cases représentant les positions possibles d'un élève.

Nous affectons à chaque case le temps qui la sépare de la sortie la plus proche.

6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56
6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03
6,43	5,94	5,46	4,98	4,51	4,04	3,58	3,13	2,7	2,3	1,95	1,68	1,52
6,56	6,09	5,62	5,15	4,7	4,25	3,82	3,4	3,01	2,66	2,36	2,14	2,02
6,73	6,27	5,81	5,37	4,93	4,51	4,1	3,72	3,36	3,05	2,8	2,61	2,51
6,93	6,49	6,05	5,62	5,2	4,8	4,42	4,07	3,75	3,47	3,25	3,09	3,01
7,16	6,73	6,31	5,9	5,51	5,13	4,78	4,45	4,16	3,91	3,72	3,58	3,51
7,16	6,73	6,31	5,9	5,51	5,13	4,78	4,45	4,16	3,91	3,72	3,58	3,51
6,93	6,49	6,05	5,62	5,2	4,8	4,42	4,07	3,75	3,47	3,25	3,09	3,01
6,73	6,27	5,81	5,37	4,93	4,51	4,1	3,72	3,36	3,05	2,8	2,61	2,51
6,56	6,09	5,62	5,15	4,7	4,25	3,82	3,4	3,01	2,66	2,36	2,14	2,02
6,43	5,94	5,46	4,98	4,51	4,04	3,58	3,13	2,7	2,3	1,95	1,68	1,52
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56
6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25
6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03

Grille des temps d'évacuation pour un élève



Travail de recherche au lycée



Discussion avec le chercheur



Présentation à Marseille



Présentation à Gap

Nous disposons ainsi de tous les temps possibles d'évacuation d'un élève, si nous faisons la moyenne nous obtenons : **3,85**.

Tableau du nombre de cases, de la grille ci-dessus, correspondant à un temps d'évacuation donné

Nous regroupons toutes ces valeurs dans un tableau :

Temps	0,25	0,56	0,75	0,9	1,03	1,25	1,35	1,52	1,6	...	6,73	6,93	7,16
Nombre de cases	2	4	2	4	4	6	4	2	4	...	4	2	2

Nous noterons  $x=x(T)$  le nombre de cases d'évacuation en un temps T et  $y=y(T)$  le nombre de cases d'évacuation en un temps inférieur ou égal à T.

## Passage à deux élèves :



Exposé lors du congrès de Gap



Extrait du cahier de recherche



Présentation à Gap



Travail de recherche au lycée

Nous gardons le même modèle, nous allons placer deux élèves E1 et E2 dans la salle. Le temps d'évacuation sera la plus grande distance entre E1, E2 et la sortie la plus proche.

Temps	0,25	0,56	0,75	0,9	1,03	1,25	1,35	1,52	1,6	...	T	...	6,73	6,93	7,16
Nombre de cases pour un élève	2	4	2	4	4	6	4	2	4	...	x	...	4	2	2
Nombre de cases pour deux élèves	4	32	28	80	112	228	192	108	240	...		...	2032	1028	1036

Après de nombreux essais, nous avons obtenu le résultat suivant :

**Résultat 1 :** Le nombre de manières de placer deux élèves pour que le temps d'évacuation soit exactement T est  $x(T)^2 + 2 \times x(T) \times (y(T) - x(T))$ .

Ce qui donne un temps moyen de **4,83**.



# Pour trois élèves :

Suite à une remarque de notre chercheur : pour évacuer trois élèves E1, E2 et E3 en un temps T, alors

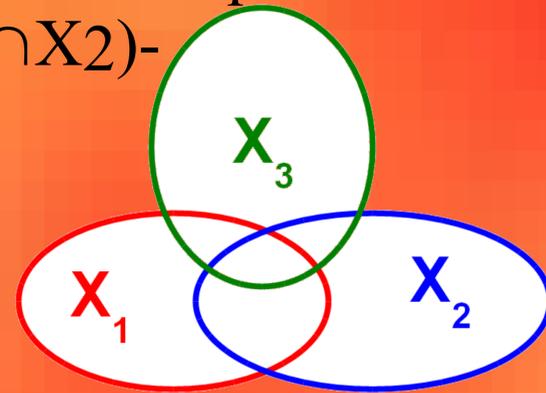
- soit E1 en un temps T et E2 et E3 en un temps inférieur ou égal à T,
- soit E2 évacué en un temps T et E1 et E3 en un temps inférieur ou égal à T,
- soit E3 évacué en un temps T et E1 et E2 en un temps inférieur ou égal à T.

Si nous notons X1 le premier cas, X2 le second et X3 le dernier.

Avec l'aide de la théorie des « patatoïdes », nous arrivons à montrer que

$$\text{card}(X1 \cup X2 \cup X3) = \text{card}(X1) + \text{card}(X2) + \text{card}(X3) - \text{card}(X1 \cap X2) - \text{card}(X1 \cap X3) - \text{card}(X2 \cap X3) + \text{card}(X1 \cap X2 \cap X3)$$

Ce qui nous a permis d'établir que  $f_3(T) = 3xy^2 - 3x^2y + x^3$



Temps	0,25	0,56	0,75	0,9	1,03	1,25	1,35	1,52	1,6	...	T	...	6,73	6,93	7,16
Nombre de cas pour un élève	2	4	2	4	4	6	4	2	4	...	$x(T)$	...	4	2	2
Nombre de cas pour deux élèves	4	32	28	80	112	228	192	108	240	...	$f_2(T)$	...	2032	1028	1036
Nombre de cas pour trois élèves	8	208	296	1216	2368	6552	6928	4376	10816	...	$f_3(T)$	...	774208	396296	402488

Nous trouvons un temps moyen d'évacuation de 3 élèves de **5,3**

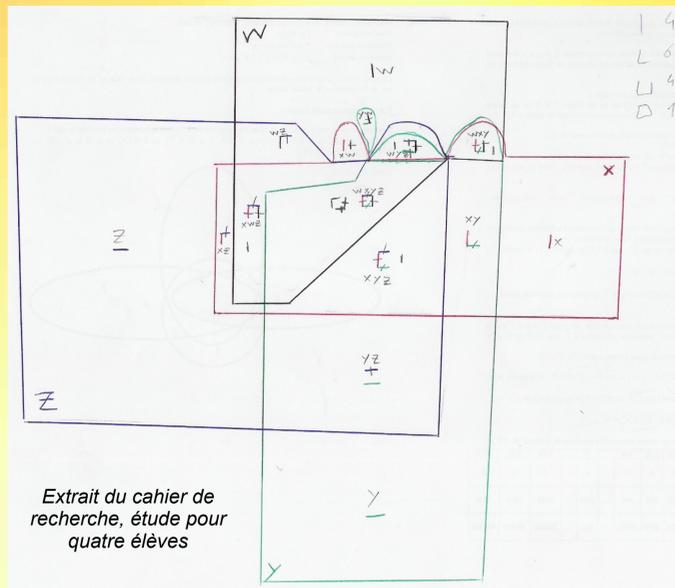
# Formule pour quatre élèves et généralisation :



Travail de recherche au lycée



Stand lors du concours « Faites de la science » à Marseille



Extrait du cahier de recherche, étude pour quatre élèves

Nous avons obtenu les formules suivantes, pour un T donné :

- pour un élève :  $f_1(T) = x$
- pour deux élèves :  $f_2(T) = 2xy - x^2$
- pour trois élèves :  $f_3(T) = 3xy^2 - 3x^2y + x^3$
- pour quatre élèves :  $f_4(T) = 4xy^3 - 6x^2y^2 + 4x^3y - x^4$



Conjecture pour n élèves :  $f_n(T) = y^n - (y - x)^n$

Avec cette formule, nous programmons une feuille de calcul pour obtenir les temps moyens de sortie (en fonction de n).

Pour 35 élèves, le temps moyen est de **6,76**.

# Cas avec obstacles :

**GARDEZ VOTRE SANG-FROID**

Grille des temps d'évacuation pour un élève, avec obstacles

La nouvelle grille pour l'évacuation d'un élève va changer. A partir de ceci nous obtenons une nouvelle fonction  $f_1(T) = x$  mais la suite de la modélisation et des résultats reste la même.

**EXIT**

6,43	5,93	5,43	4,93	4,43	3,93	3,43	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03			
	5,32	4,82	4,32	3,82	3,32	2,82	2,32	1,82	1,35	0,9	0,56				
		5,53	5,03							1,25	0,75	0,25			
6,32	5,82	5,32	4,82	4,32	3,82	3,32	2,82	2,32	1,82	1,35	0,9	0,56			
			5,53	5,03							1,6	1,25	1,03		
6,73	6,23	5,73	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,8	2,3	1,95	1,68	1,52			
			6,01	5,51							2,36	2,14	2,02		
7,22	6,72	6,22	6,01	5,8	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,8	2,61	2,51			
			6,72	6,5							3,25	3,09	3,01		
8,21	7,71	7,21	7	6,72	6,22	5,72	5,22	4,72	4,22	3,72	3,58	3,51			
			7,07	6,96							3,72	3,58	3,51		
7,86	7,36	6,86	6,36	6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	3,09	3,01			
			6,36	5,86							2,8	2,61	2,51		
7,16	6,66	6,16	5,66	5,16	4,66	4,16	3,66	3,16	2,66	2,36	2,14	2,02			
			5,72	5,22							1,95	1,68	1,52		
6,52	6,02	5,52	5,02	4,52	4,02	3,52	3,02	2,52	2,02	1,6	1,25	1,03			
			5,46	4,96							1,35	0,9	0,56		
6,25	5,75	5,25	4,75	4,25	3,75	3,25	2,75	2,25	1,75	1,25	0,75	0,25			
			6,27	5,77	5,27	4,78	4,28	3,78	3,29	2,8	2,3	1,82	1,35	0,9	0,56
6,33	5,84	5,34	4,85	4,37	3,88	3,4	2,93	2,46	2,02	1,6	1,25	1,03			