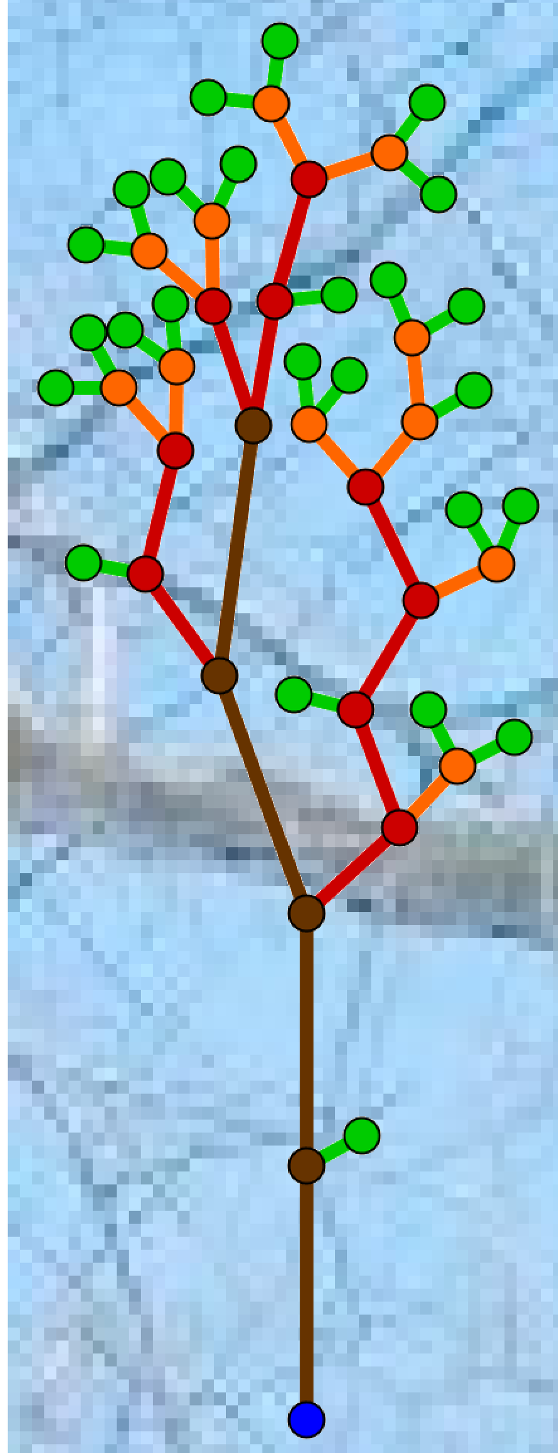
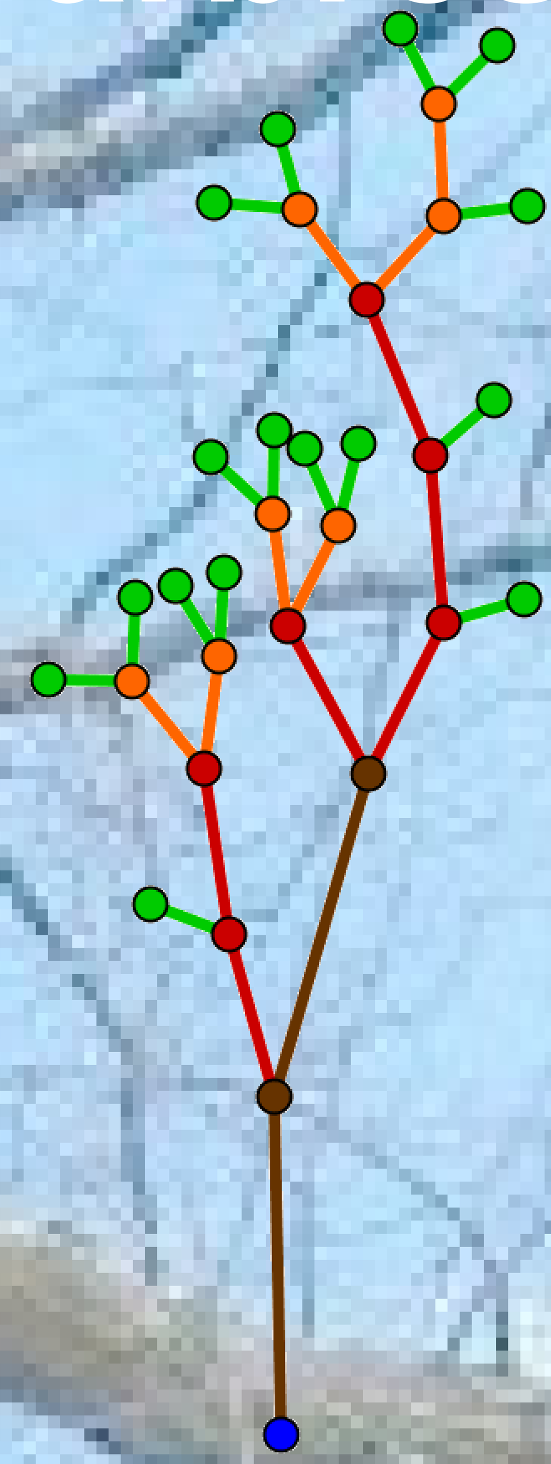
Modélisation de la croissance des arbres

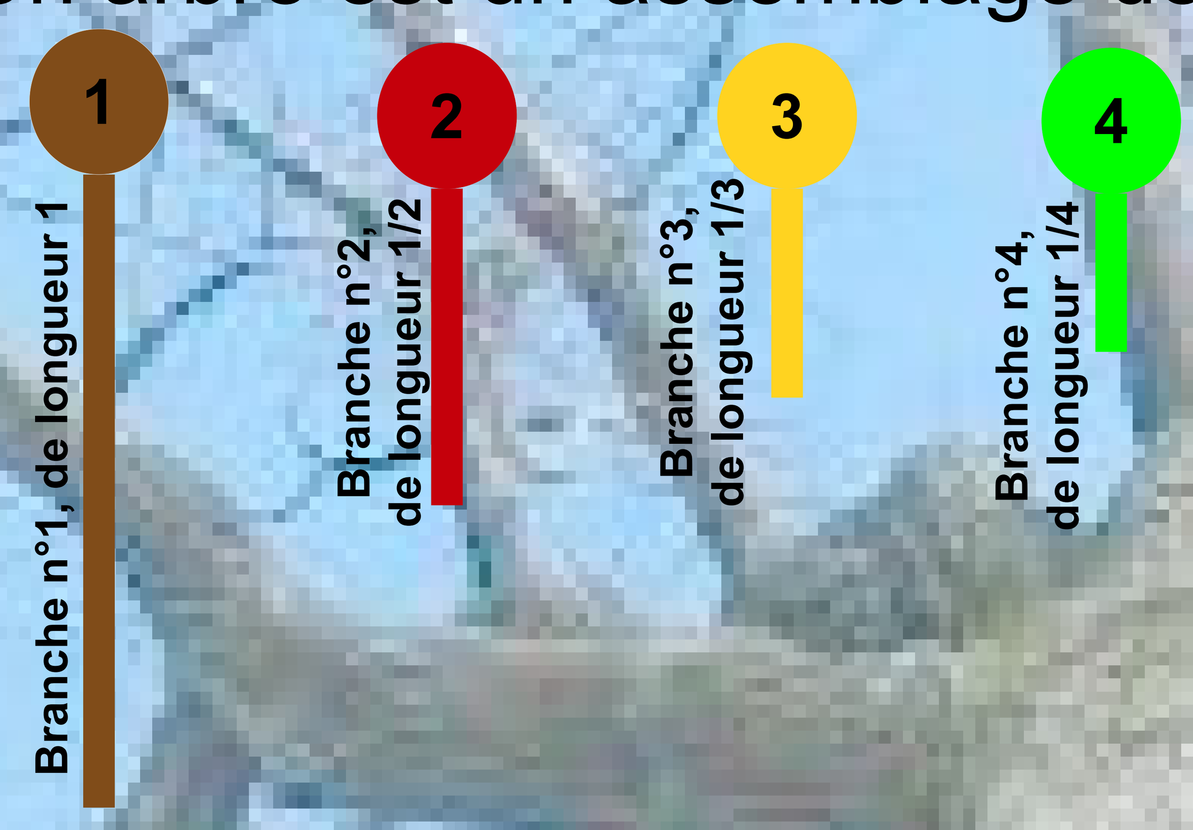
Par Amaury JOURDAIN, Martin LUC et Tanguy RUTH élèves de 1°ES et 1°S du lycée d'Altitude de Briançon.





Présentation d'un modèle

Un arbre est un assemblage de **QUATRE** types de branche



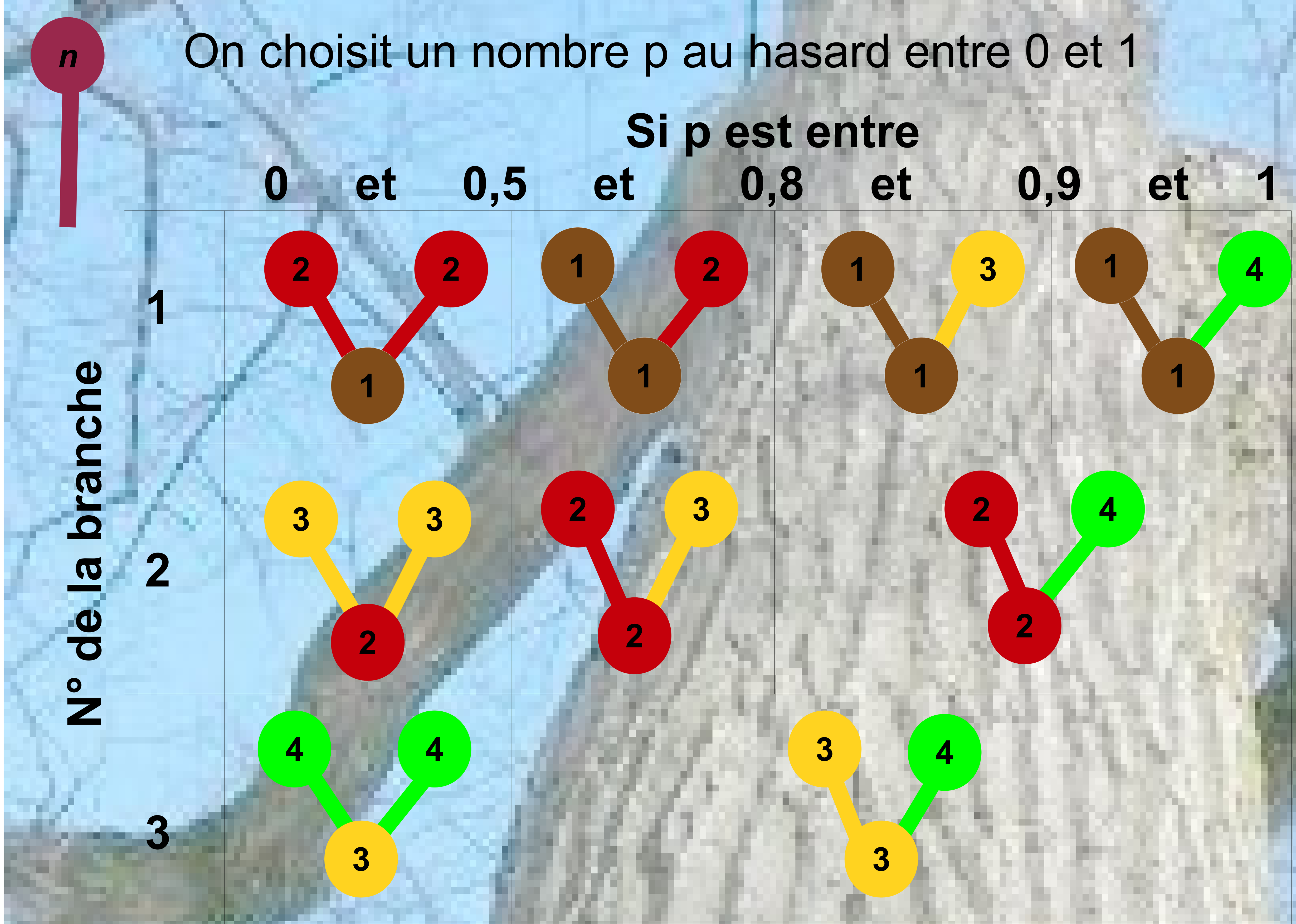
Exposé, avec leurs collègues roumains, lors du congrès MeJ à l'Université de Lyon

Une branche évolue en **DEUX NOUVELLES** branches de numéro supérieur ou égal à son numéro (une branche n°4 n'évolue plus).

Exposé et présentations sur leur stand lors du colloque Dedra-MATH-isons à l'Université de Louvain

Évolution d'une branche de numéro *n*

On choisit un nombre p au hasard entre 0 et 1

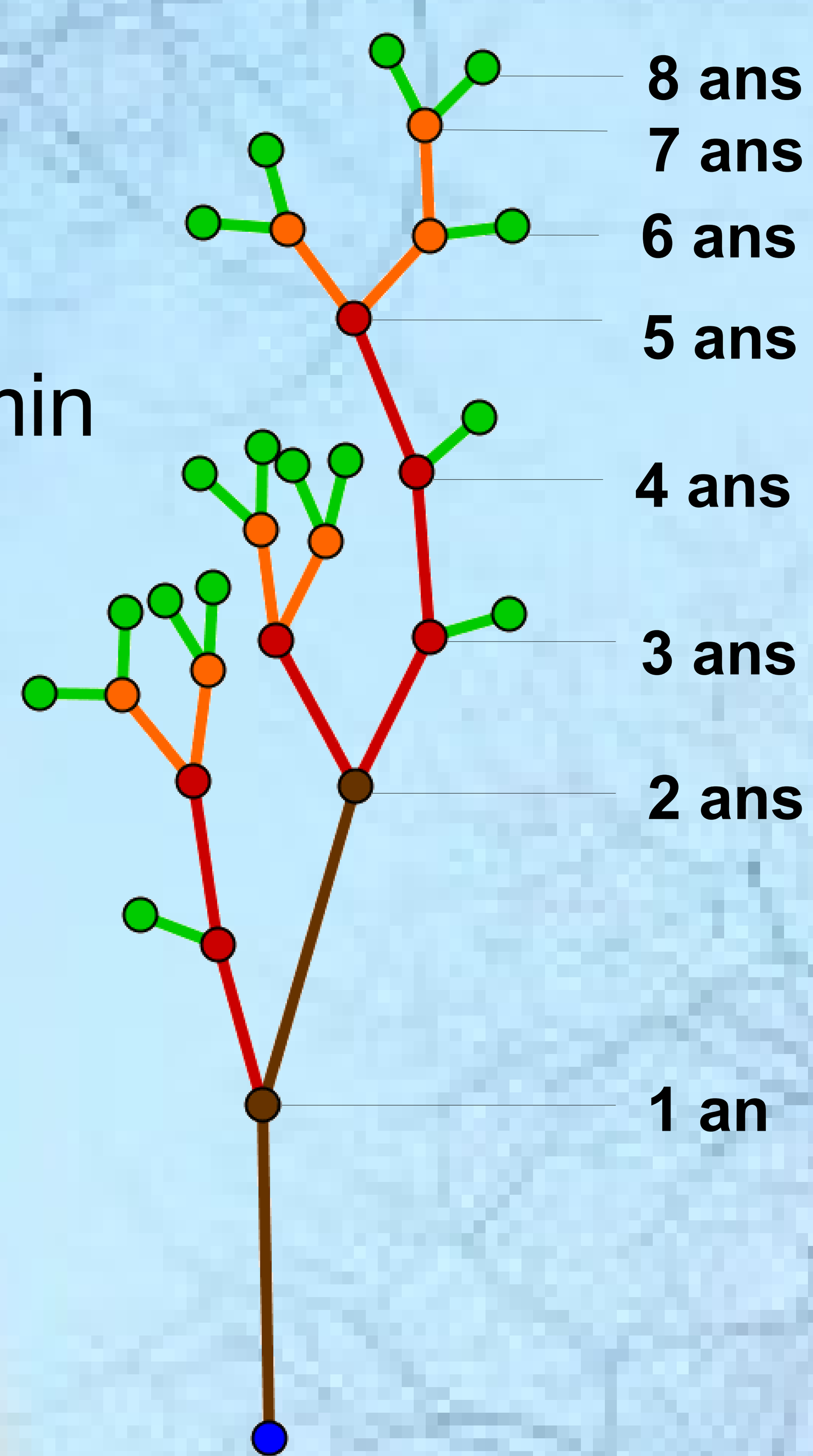


Matrice d'évolution associée

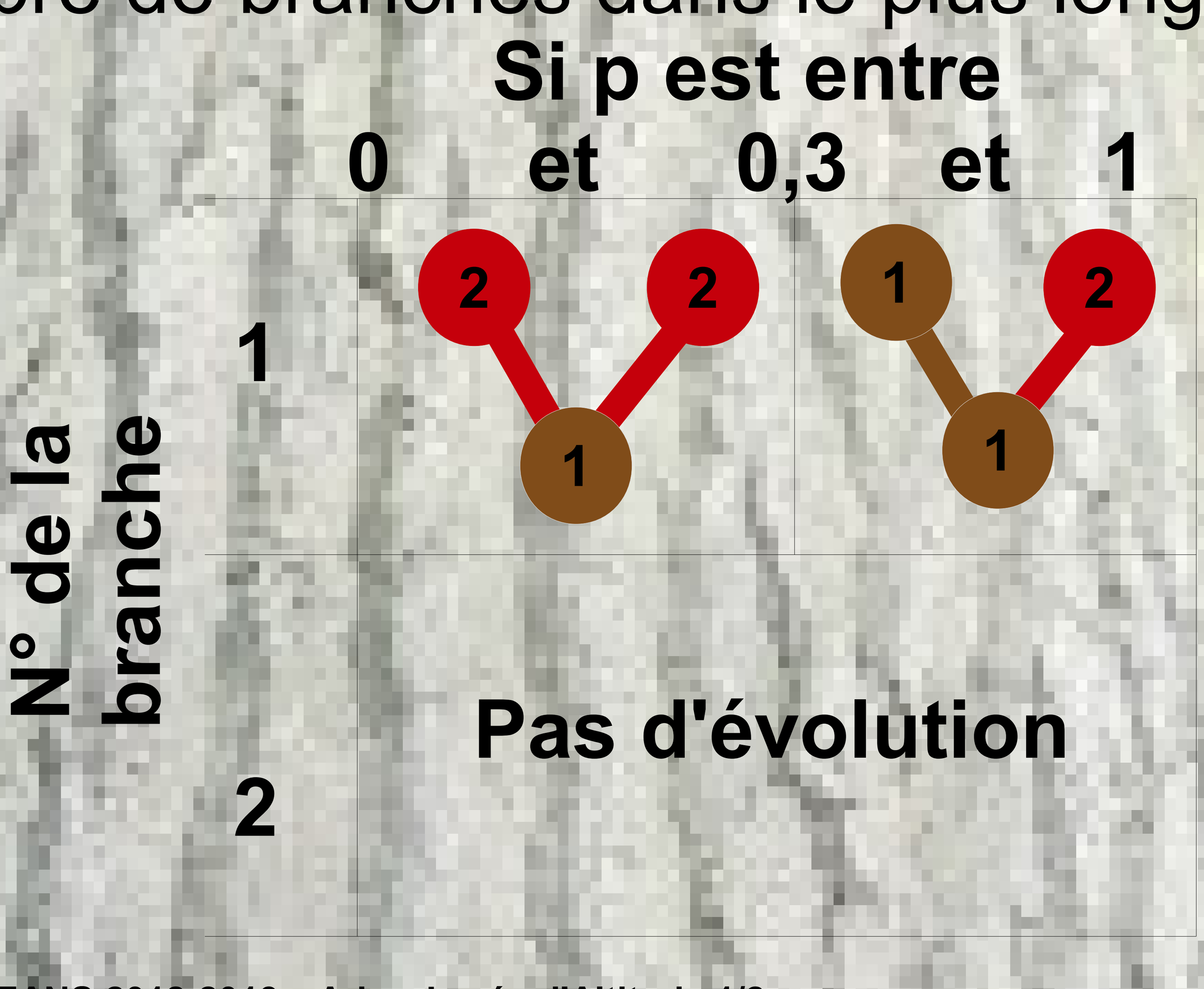
$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,8 & 0,9 & 1 \\ 0,5 & 0,8 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Étude de l'âge

L'âge d'un arbre est le nombre de branches dans le plus long chemin



Nos études ont commencé avec des arbres qui ont seulement deux types de branche (n° 1 et n° 2) et le système ci-contre :



Matrice d'évolution associée

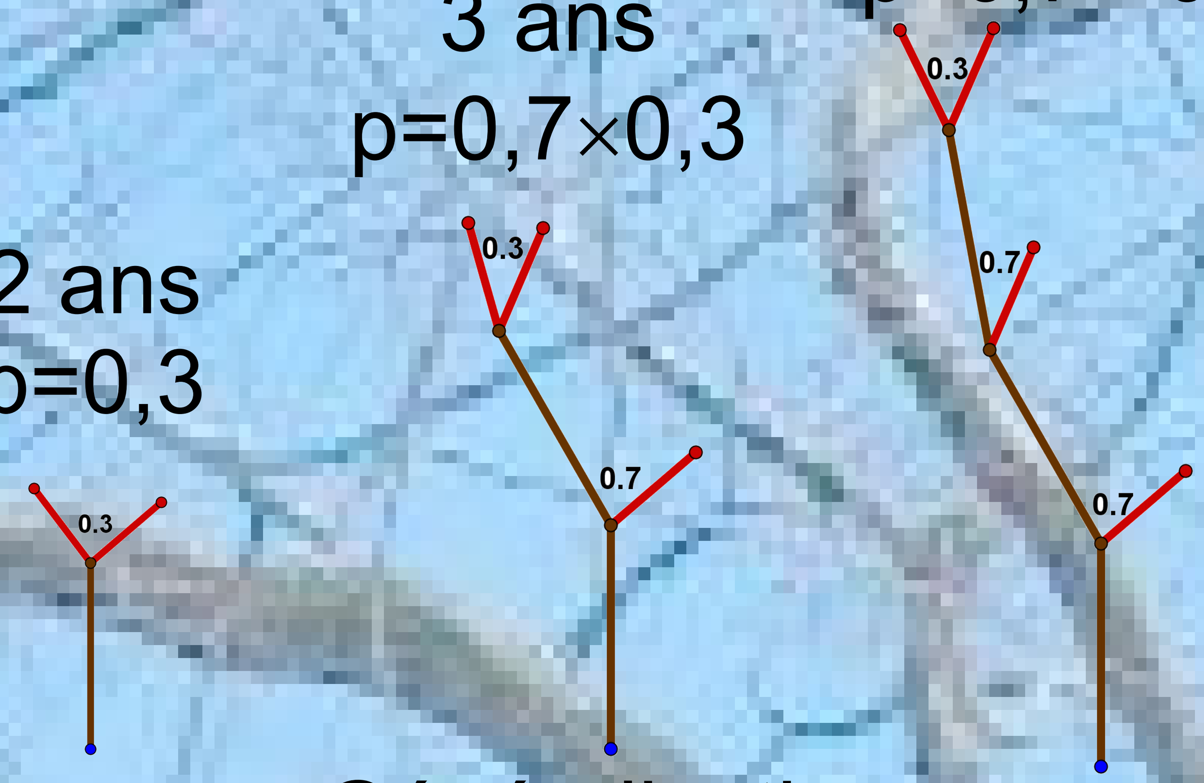
$$\begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Évolutions possibles avec les âges et les probabilités correspondantes

2 ans
p=0,3

3 ans
p=0,7×0,3

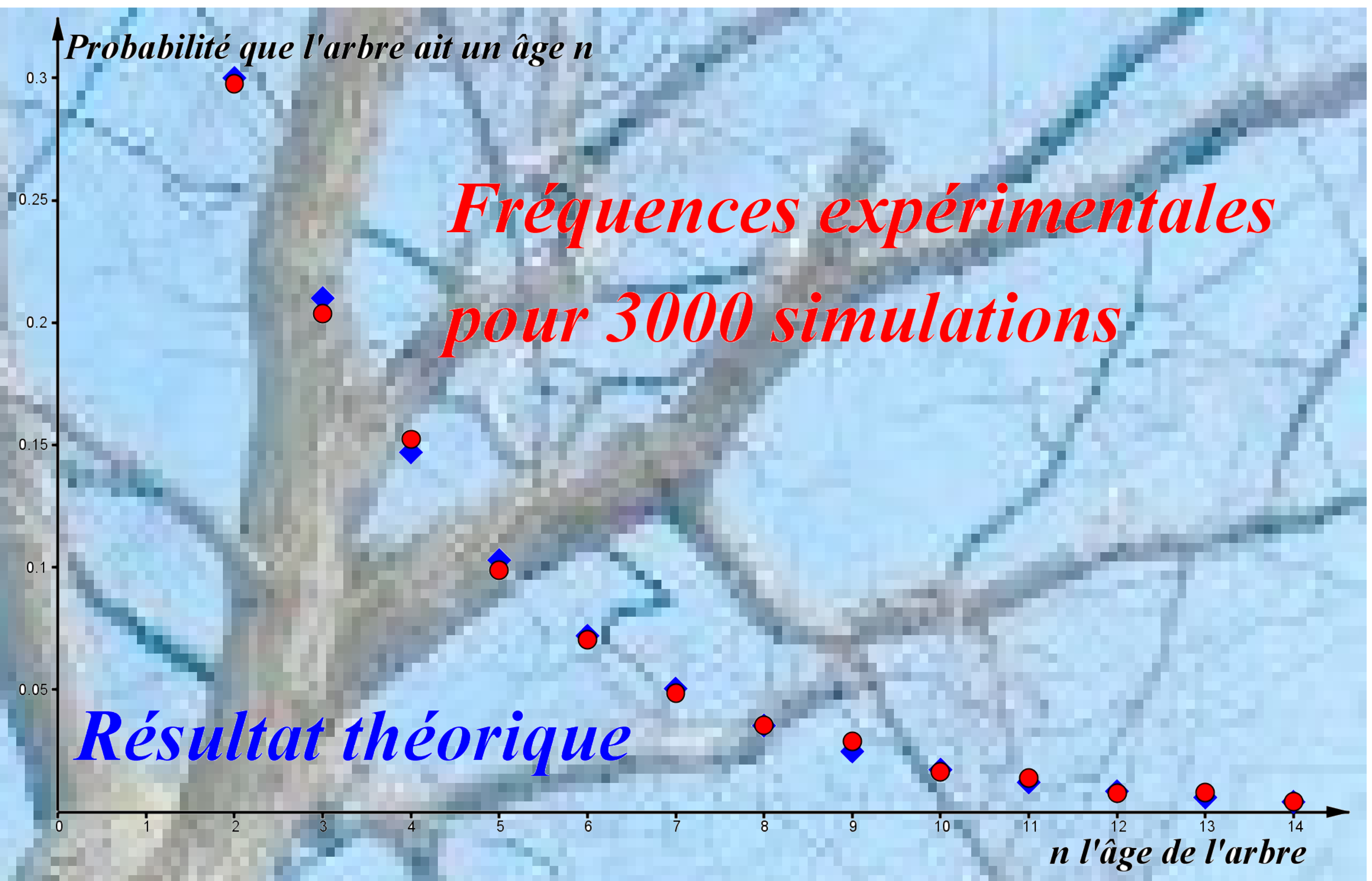
4 ans
$p=0,7^2\times 0,3$



Généralisation :

$P(n \text{ ans})=0,7^{n-2}\times 0,3$ avec $n \geq 2$

et $P_2(\text{age}\leq n)=1-0,7^{n-1}$ avec $n \geq 2$



Comparaison entre le résultat théorique et 3000 simulations avec une matrice d'évolution 2x2

Grande idée de Tanguy pour la matrice d'évolution 3x3

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Travail de recherche au lycée

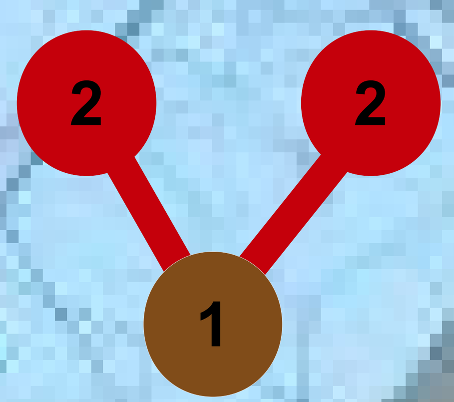
Nous cherchons $P_3(\text{âge}\leq n)$,

la branche n° 1 du début peut évoluer :

En deux branches 2-2 (probabilité 0,3)

Les branches n° 2 sont indépendantes et leur matrice d'évolution est

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

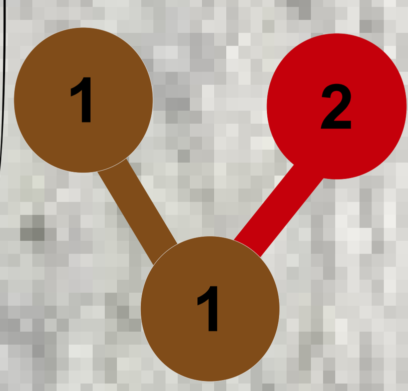


$$\begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $P_3(n)=0,3\times(P_2(n-1))^2$

En deux branches 1-2 (probabilité 0,2)

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



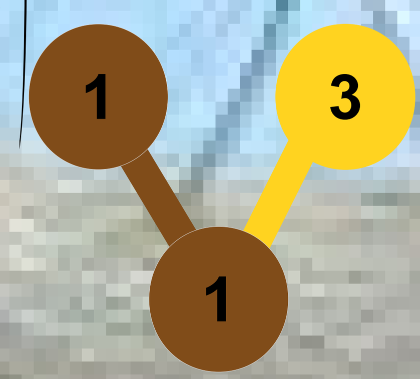
$$\begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'évolution de chaque branche

Alors $P_3(n)=0,2\times P_2(n-1)\times P_3(n-1)$

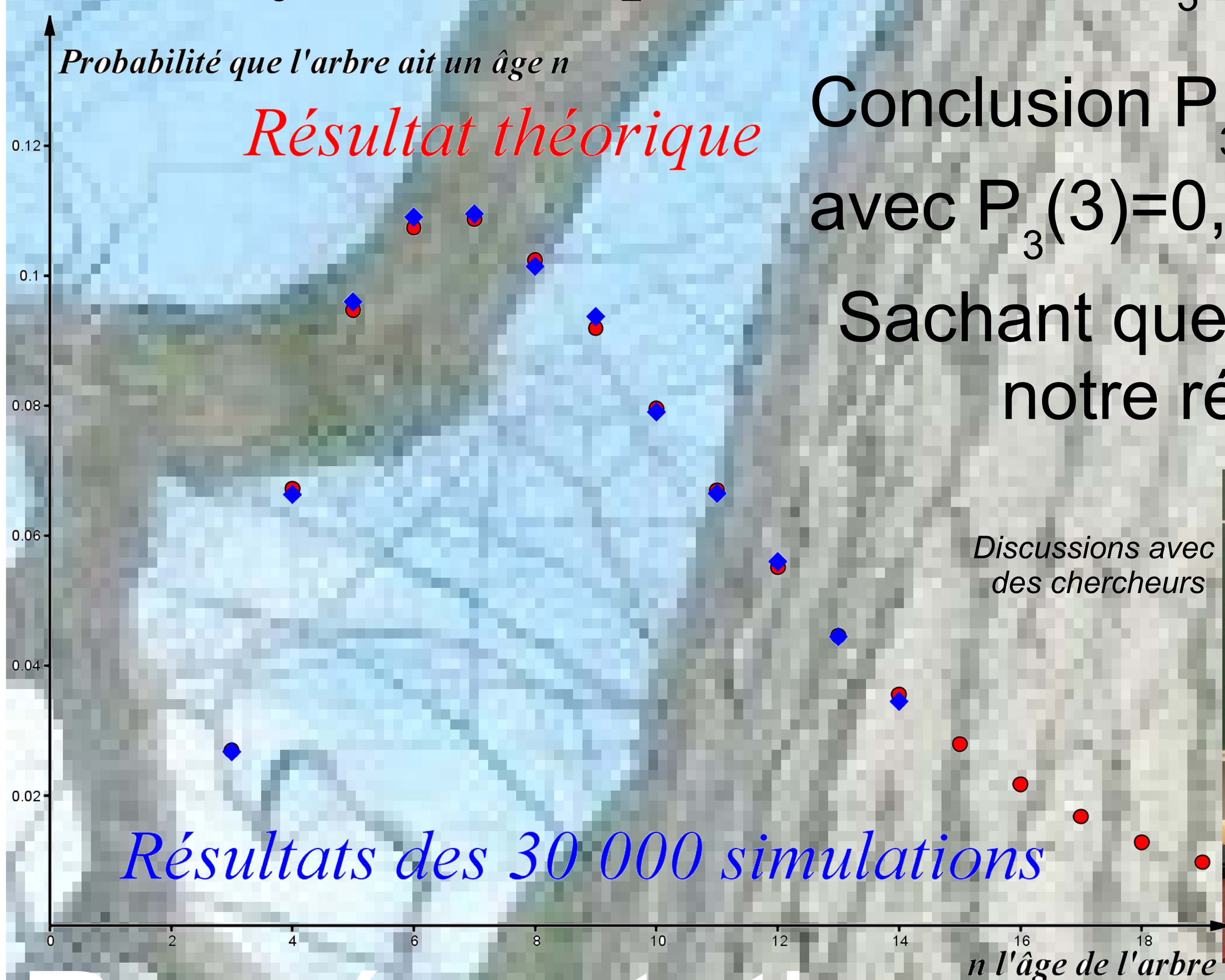
En deux branches 1-3 (probabilité 0,5)

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 1 \\ 0,3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Pas d'évolution pour la branche n° 3

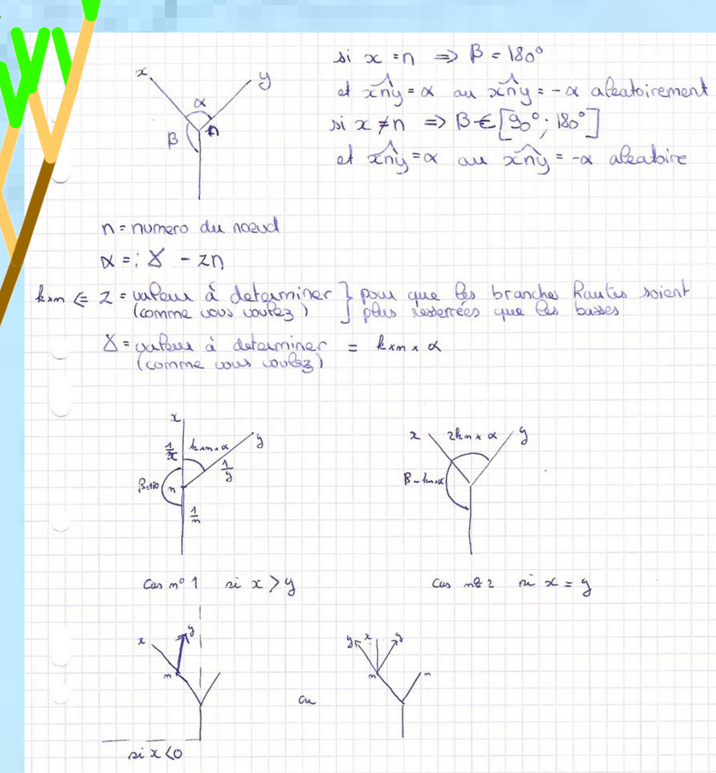
Alors $P_3(n)=0,5\times P_3(n-1)$



Conclusion $P_3(n)=0,3\times(P_2(n-1))^2+0,2\times P_2(n-1)\times P_3(n-1)+0,5\times P_3(n-1)$ avec $P_3(3)=0,3^3$

Sachant que P(age=n)=P3(n)-P3(n-1), nous avons comparé notre résultat théorique avec 30 000 simulations

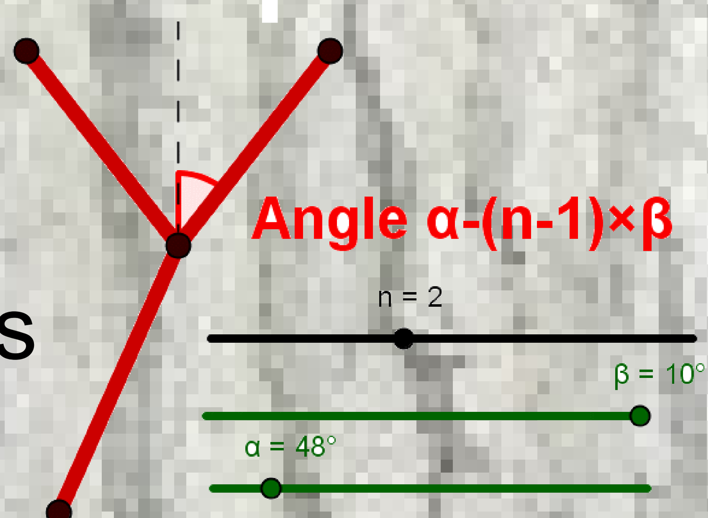
Discussions avec des chercheurs



Extrait du cahier de recherche des élèves

Représentation graphique

Nos travaux sur la représentation graphique se poursuivront l'année prochaine. Actuellement nous travaillons sur les angles entre deux branches.



n est l'âge du noeud

α et β sont deux paramètres