La géométrie Tropicale

À la découverte d’une nouvelle géométrie non euclidienne

PARTIE 1
algèbre tropicale

Association Maths pour tous

Préambule

Dans ce document, on va avoir besoin d'utiliser selon les cas deux méthodes différentes pour prouver qu'une égalité est vraie. En fonction des contextes, l'une ou l'autre de ces méthodes sera utiliser.

Méthode 1 : calculer séparément chaque membre de l'égalité et observer si les résultats obtenus sont égaux.

Méthode 2 : partir d'un des deux membres de l'égalité et procéder à des modifications successives de cette expression de manière à obtenir en final l'autre membre de l'égalité.

Exemple

---

1. Montrer de deux manières différentes que les égalités suivantes sont vraies :

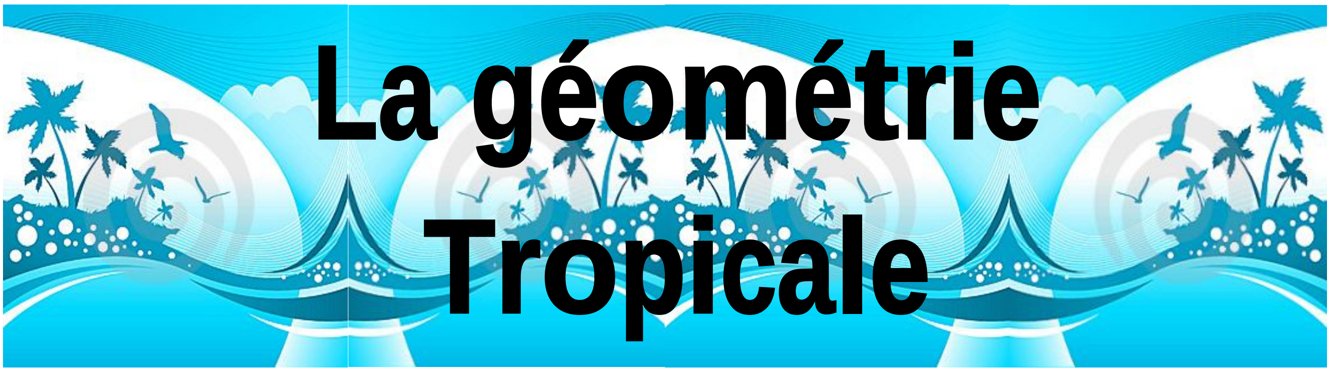
$$25 \times 25 = 2 \times 3 \times 100 + 25$$
$$35 \times 35 = 3 \times 4 \times 100 + 25$$
$$65 \times 65 = 6 \times 7 \times 100 + 25$$

2. Que remarque-t-on ? Apporter la preuve de cette conjecture.

3. Application : en déduire très rapidement les réponses aux calculs suivants :

$15^2 = \ldots\ldots$ $25^2 = \ldots\ldots$ $35^2 = \ldots\ldots$ $45^2 = \ldots\ldots$

$55^2 = \ldots\ldots$ $65^2 = \ldots\ldots$ $75^2 = \ldots\ldots$ $85^2 = \ldots\ldots$



La géométrie Tropicale

Le but de ce travail est d'aller à la découverte de la « géométrie tropicale », une nouvelle géométrie non euclidienne. Mais avant d'en arriver là, parlons ensemble « d'algèbre tropicale ».

ALGEBRE TROPICALE
L'algèbre tropicale s'obtient en posant de nouvelles opérations sur les nombres réels : • *L'addition tropicale* de deux nombres devient la recherche du *minimum de ces deux nombres* : a ⊕ b = min{a;b} (le *minimum entre a et b*). Par exemple : 3 ⊕ 5 = 3 • *La multiplication tropicale* devient l'addition *classique de ces deux nombres* : a ⊗ b = a + b. Par exemple : 3 ⊗ 5 = 8.

Quelles surprises nous réservent ces nouvelles opérations ?

Quelques essais

1. Effectuer les calculs suivants en algèbre tropicale :

A = 2 ⊕ 9 B = 5 ⊗ 7 C = 6 ⊕ 9 ⊕ 7 D = 3 ⊗ 9 ⊗ 5

E = 1 ⊗ [2 ⊕ (-1)] F = 1 ⊗ (-2) G = (5 ⊕ 3)^2

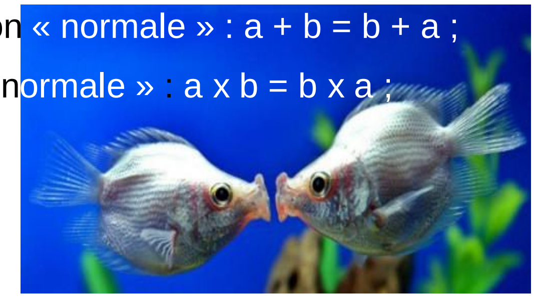
Pour la suite, citons les utiles propriétés suivantes : min{a + b; a + c} = a + min{b;c} min{a x b; a x c} = a x min{b;c}

Propriété de base de ces opérations

2. L'addition et la multiplication tropicale sont-elles commutatives ?

Rappels : on peut commuter les termes d'une addition « normale » : a + b = b + a ;

on peut commuter les facteurs d'une multiplication « normale » : a x b = b x a ;



Est-ce encore vrai en algèbre tropicale ?

3. Ces opérations sont-elles associatives ?

Rappels : on peut associer les termes d'une suite d'additions « normales » :

(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c

on peut associer les facteurs d'une suite de multiplications « normales » :

(a x b) x c = a x (b x c) = a x b x c

Est-ce encore vrai en algèbre tropicale ?

4. Ces opérations sont-elles distributives ?

Rappels : la multiplication est distributive sur l'addition : a x (b + c) = axb + axc

Est-ce encore vrai en algèbre tropicale ?

5. Les puissances tropicales :

$$x^{\wedge n} = \underbrace{x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \ldots \otimes x}_{n}$$

Montrer en fait que l'expression simplifiée de la puissance tropicale $x^{\wedge n}$ correspond à la multiplication « normale ».

6. Rappeler l'expression développée de la puissance « normale » : (a + b)² = ...

Que vaut cette expression en géométrie tropicale ? (a ⊕ b)^² = ...

De même, donner une expression développée simple de (a ⊕ b)$^{\wedge n}$

<u>Les opérations réciproques</u>

Dans le monde des calculs « normaux », l'addition, la multiplication et le carré ont des opérations réciproques : la soustraction, la multiplication et la division.

6. Que devient la division en algèbre tropicale ?

Rappel : pour définir la division, on doit chercher l'opération réciproque de la multiplication. La division tropicale notée « Ø » est-elle possible ? Si oui, la définir.

7. Que devient la soustraction en algèbre tropicale ?

Rappel : pour définir la soustraction, on doit chercher l'opération réciproque de l'addition. La soustraction tropicale notée « Θ » est-elle possible ? Si oui, la définir.

8. Que devient la racine carrée en algèbre tropicale ?

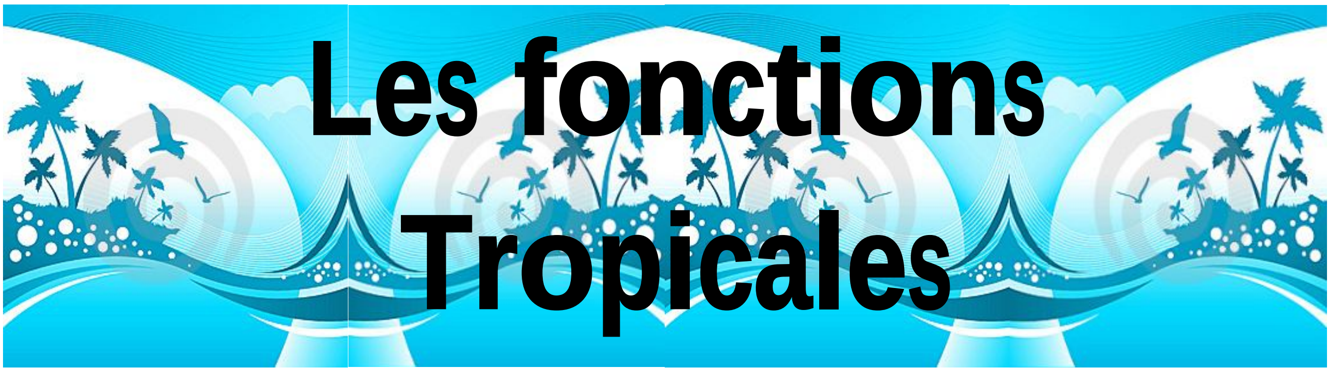
Rappel : pour définir la racine carrée, on doit chercher l'opération réciproque du carré. La racine carrée tropicale est-elle possible ? Si oui, la définir.

La géométrie Tropicale

À la découverte d'une nouvelle géométrie non euclidienne

PARTIE 2
Fonctions tropicales

Association Maths pour tous



Les fonctions Tropicales

Fonctions linéaires classiques, fonctions linéaires tropicales

Rappels : soit a un nombre donné. L'application linéaire classique f est le procédé qui permet d'obtenir une quantité f(x) à partir d'une quantité x par la relation f(x)=ax. Il y a alors proportionnalité entre x et f(x) : a est le coefficient de proportionnalité.

On note : $x \longrightarrow \mathrm{f}(x)$ f(x) est appelé l'image de x

ou $x \longrightarrow \mathrm{a}x$

Graphiquement, on obtient une droite qui passe par l'origine. y = ax est une équation de cette droite (y représentant les ordonnées et x les abscisses). Le coefficient de proportionnalité a détermine la pente de la droite, son coefficient directeur.

1. Tracer dans un repère les représentations graphiques des fonctions linéaires classiques : f(x) = x g(x) = 3x h(x) = -2x k(x) = (5/4)x

2. Les fonctions linéaires tropicales sont de la forme f(x) = a $\otimes$ x. Quelles sont les différences entre les fonctions linéaires tropicales et les fonctions linéaires classiques ?

3. Tracer dans un repère les représentations graphiques des fonctions linéaires tropicale : ft(x) = x gt(x) = 3 $\otimes$ x ht(x) = -2 $\otimes$ x kt(x) = (5/4)$\otimes$$x$

Fonctions affines classiques, fonctions affines tropicales

Rappels : soit a et b deux nombres donnés. L'application affine classique f est le procédé qui permet d'obtenir une quantité f(x) à partir d'une quantité x par la relation f(x)=ax + b. Il n'y a alors plus proportionnalité entre x et f(x) :

On note : $x \longrightarrow \mathrm{f}(x)$ f(x) est appelé l'image de x

ou $x \longrightarrow \mathrm{a}x + \mathrm{b}$

Graphiquement, on obtient une droite qui passe par le point (0;b) et dont le coefficient directeur est a. y = ax + b est une équation de cette droite (y représentant les ordonnées et x les abscisses).

1. Tracer dans un repère les représentations graphiques des fonctions affines classiques : $f(x) = x + 2$ $g(x) = 3x - 1$ $h(x) = -4x + 5$ $k(x) = (3/4)x + 2$

2. Les fonctions affines tropicales sont de la forme $f(x) = a \otimes x \oplus b$. Quelles sont les différences entre les fonctions affines tropicales et les fonctions affines classiques ?

3. Tracer dans un repère les représentations graphiques des fonctions affines tropicale : $ft(x) = x$ $gt(x) = 3 \otimes x \ominus 1$ $ht(x) = -4 \otimes x \oplus 5$ $kt(x) = (3/4) \otimes x \oplus 2$

<u>Fonctions polynômes classiques, fonctions polynômes tropicales</u>

Faire une étude comparative des fonctions polynômes classiques du type :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et des fonctions polynômes tropicales du type :

$$ft(x) = (a \otimes x^2) \oplus (b \otimes x) \oplus c$$

La géométrie Tropicale

À la découverte d'une nouvelle géométrie non euclidienne

PARTIE 3

La géométrie tropicale est-elle euclidienne ?

Association Maths pour tous

La géométrie tropicale est-elle euclidienne ?

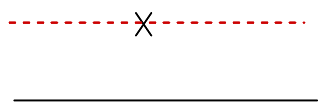
L'an dernier, en explorant les propriétés de certaines géométries non euclidienne comme la géométrie sphérique ou bien la géométrie hyperbolique, nous avions découvert des propriétés plutôt déroutantes. Qu'en est-il pour la géométrie tropicale ?

Rien ne va plus sous les tropiques..

Rappel des axiomes 1 et 5 d'Euclide

Axiome n°1 : un unique segment de droite peut être tracé en joignant deux points distincts quelconques

Axiome n°5 : étant donné une droite (d) et un point P, il existe une unique droite passant par P et parallèle à (d)



1. En vous appuyant sur la partie 2, énoncer les caractéristiques de ce que pourrait être une droite tropicale.

2. Montrer qu'en géométrie tropicale, deux points A et B ne sont pas toujours alignés… (oups). En s'appuyant sur un premier point A, où doit se trouver B pour être sûr d'être aligné avec A ?

3. L'axiome n°5 d'Euclide reste-t-il valable en géométrie tropicale ?

La géométrie Tropicale

À la découverte d'une nouvelle géométrie non euclidienne

PARTIE 4
Applications à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe

---

Association Maths pour tous

Une application des mathématiques tropicales

Mais à quoi peu bien servir un truc aussi bizarre que la mathématique tropicale ??
Et bien en voici un exemple.

Une société de transport maritime veut optimiser ses coûts de transports entre les différents ports qui accueillent ses bateaux. Parfois, pour se rendre d'un port A à un port B, il vaut parfois mieux parfois faire un ou plusieurs détours par d'autres ports sur le chemin plutôt que de s'y rendre directement, car lorsque l'on calcule la somme des coûts, cela s'avère plus avantageux.

Le problème est donc le suivant : imaginons qu'une société ait évalué l'ensemble des coûts de passage d'un port aux autres ports, quelle méthode mathématique peut-on utiliser pour déterminer rapidement l'itinéraire optimal que doit suivre un bateau pour se rendre d'un port donné à un autre port donné ?

On part d'un exemple simple avec seulement 4 ports. La méthode peut-être généralisée ensuite pour un grand nombre de ports. Les coûts sont résumés dans le tableau suivant :

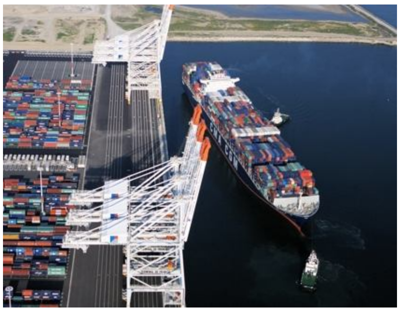
	Port n°1	Port n°2	Port n°3	Port n°4
Port n°1	0	1	2	∞
Port n°2	1	0	∞	3
Port n°3	3	1	0	4
Port n°4	∞	∞	5	0

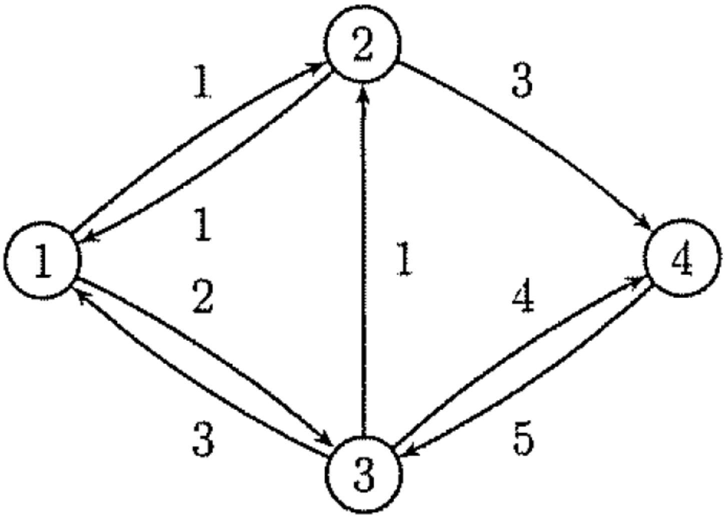
Ce tableau se lit : « le passage du port n°4 au port n°3 coûte 5 ».
Le signe « ∞ » dans certaines cases signifient que les autorités interdisent le passage d'un port à l'autre (le passage « n'a pas de prix, il est infini »).

Ce tableau

	Port n°1	Port n°2	Port n°3	Port n°4
Port n°1	0	1	2	∞
Port n°2	1	0	∞	3
Port n°3	3	1	0	4
Port n°4	∞	∞	5	0

peut-être représenté par ce que l'on appelle en mathématique un *graphe* :





Ce tableau s'appelle également en mathématique une matrice, qui s'écrit simplement :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations classiques sur les matrices

Il se trouve que ces objets mathématiques que sont les matrices peuvent s'addition-ner...

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 4+9 & 1+0 \\ 3+2 & 1+8 & 6+11 \\ 7+1 & 0+2 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 1 \\ 5 & 9 & 17 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

... se multiplier…

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 2 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times5+4\times2+1\times1 & 2\times9+4\times8+1\times2 & 2\times0+4\times11+1\times3 \\ 3\times5+1\times2+6\times1 & 3\times9+1\times8+6\times2 & 3\times0+1\times11+6\times3 \\ 7\times5+0\times2+4\times1 & 7\times9+0\times8+4\times2 & 7\times0+0\times11+4\times3 \end{pmatrix} = ...$$

… se mettre à la puissance…

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} = ...$$

1. Calculer : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

L'addition de matrices est-elle commutative ?

2. Calculer : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

La multiplication de matrices est-elle commutative ?

3. Calculer (A x B) x C et A x (B x C), avec : $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

La multiplication de matrices est-elle associative ?

4. Calculer : $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}^3$

Opérations tropicales sur les matrices

1. Finir le calcul : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \oplus (-1) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

2. Finir le calcul : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \otimes (-1) \oplus 1 \otimes 5 \oplus 5 \otimes 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$

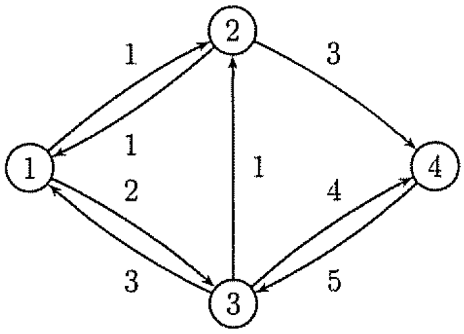
3. Calculer la puissance tropicale de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{\wedge 3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Retour à notre exemple

On aimerait, à partir du tableau des coûts de passage d'un port à l'autre représenté par la matrice… ...et le graphe...

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty \\ 1 & 0 & \infty & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ \infty & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$



...obtenir le meilleur tableau de coût d'un port à l'autre, éventuellement en transitant par un ou plusieurs autres ports.

1. Calculer $C^{\wedge 2}$ (le carré tropical de la matrice C).
2. A l'aide du graphe, expliquer la signification de chaque nombre de la matrice $C^{\wedge 2}$.
3. Calculer $C^{\wedge 3}$ (le cube tropical de la matrice C).
4. A l'aide du graphe, expliquer la signification de chaque nombre de la matrice $C^{\wedge 3}$.
5. Expliquer pourquoi la matrice $C \oplus C^{\wedge 2} \oplus C^{\wedge 3}$ nous offre le tableau optimal des coûts.